Matematické vety a ich dôkazy

Základy každej matematickej teórie tvoria ***základné pojmy***, ktoré sú intuitívne jasné a názorné (napr. prirodzené číslo, reálne číslo, zlomok, bod, priamka, rovina, ...). ***Tieto základné pojmy nedefinujeme***, ale pomocou nich definujeme ostatné pojmy, ktoré sa v teórií vyskytujú.

Niekoľko elementárnych tvrdení o vlastnostiach základných pojmov prijmeme za **axiómy**. Základom logickej výstavby matematiky je súbor **axióm**, čo sú východiskové ***matematické výroky***, ktoré sa vo všeobecnosti považujú za **pravdivé a nedokazujú sa**. Slúžia na zavádzanie základných matematických pojmov.

Sústava axióm musí byť:

bezosporná - nemožno z nej vyvodiť výrok a zároveň jeho negáciu
***nezávislá* –** nemožno vyvodiť jednu axiómu z ostatných axióm
úplná – zo sústavy axióm sa dá vyvodiť pravdivosť alebo nepravdivosť ľubovoľného atematického výroku, ktorý nie je axiómou.

Príklady na axiómu:

- **Priamka** je jednoznačne určená dvomi rôznymi bodmi.
- **Rovina je** jednoznačne určená tromi rôznymi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke.
- **Peanove axiómy:**

Prvá skupina axióm

Existuje množina N (prirodzené čísla) s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Ku ***každému*** číslu $\boldsymbol{n \in N}$ existuje jediný **následník** $\boldsymbol{n' \in N}$ čísla $\boldsymbol{n}$, pre ktorý platí: $\boldsymbol{n' = n + 1}$

2. Len jedno číslo **nie je následníkom** žiadneho prirodzeného čísla; toto číslo označujeme **0** a **nazývame číslo nula,** následník nuly označujeme **1** a nazývame číslo jedna atd.

3. Každé dve rôzne prirodzené čísla majú rôznych následníkov.

Druhá skupina axióm - súčet prirodzených čísel

Ku ***každým dvom*** prirodzeným číslam $\boldsymbol{m, n \in N}$ existuje číslo: $\boldsymbol{m + n}$ nazývané **súčet** čísiel $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{n}$, pričom platí:

1. $\boldsymbol{m + 0 = m}$, pre každé $m \in N$,
2. $\boldsymbol{m + n' = (m + n)'}$, pre každé dve $m, n \in N$.

Tretia skupina axióm - súčin prirodzených čísel

Ku ***každým dvom*** prirodzeným číslam $\boldsymbol{m, n \in N}$ existuje číslo: $\boldsymbol{m \,.\, n}$ nazývané ***súčin*** čísiel $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{n}$, pričom platí:

1. $\boldsymbol{m \,.\, 1 = m}$, pre každé $m \in N$,
2. $\boldsymbol{m \,.\, n' = (m \,.\, n + m)}$, pre každé dve $m, n \in N$.

Giuseppe Peano (1858 - 1932) bol taliansky matematik, filozof a logik. Bol jedným zo zakladateľov matematickej logiky a výrazne sa podieľal tiež na vzniku teórie množín. Vytvoril štandardnú ***axiomatizáciu*** štruktúry prirodzených čísel po ňom pomenovanú Peanove axiómy. Väčšinu svojho profesionálneho života strávil na Turínskej univerzite.

Na zavedenie ďalších matematických pojmov slúžia **definície**, ktoré stanovia nový pojem a určia jeho charakteristické vlastnosti pomocou základných pojmov, príp. už zavedených pojmov.

Príklady na definíciu:

- **Kružnica** je množina všetkých bodov ležiacich v rovine, ktoré majú od určeného bodu (stredu) rovnakú vzdialenosť.
- Prirodzené číslo ***d*** delí prirodzené čísla ***n*** práve vtedy, ak ***existuje*** prirodzené číslo ***k*** s vlastnosťou ***n = k.d*** . Tento fakt zapisujeme **d | n**.
  Číslo ***d*** nazývame ***deliteľom čísla a*** a číslo ***a násobkom čísla d***.
- Každé prirodzené číslo, ktoré má ***len dvoch rôznych deliteľov***, číslo ***1*** a ***samo seba***, sa nazýva ***prvočíslo***.

Budovať, rozvíjať, zdokonaľovať teóriu, znamená odhaľovať stále nové pravdivé tvrdenia o vlastnostiach základných pojmov a ďalších definovaných pojmov, pričom najčastejšie postupujeme tak, že sformulujeme **hypotézu**, *t. j. výrok , ktorého pravdivostnú hodnotu zatiaľ (v danom čase) nepoznáme*, a potom sa snažíme hypotézu dokázať, alebo vyvrátiť.

Dôkazom ľubovoľného tvrdenia (vety) *V* rozumieme postupnosť logických úvah, ktoré ukazujú, že platnosť tvrdenia *V* logicky vyplýva z platnosti prijatých axióm a z tvrdení, ktoré už boli skôr dokázané.
Deduktívnosť výstavby matematických teórií je v tom, že každé tvrdenie (vetu), ktoré chceme do teórie začleniť, musí byť najskôr dokázané (jedinou výnimkou sú axiómy).

Matematická veta je pravdivý matematický výrok, ktorý sa dá logicky odôvodniť z axióm, definícií a už dokázaných viet. Vety slúžia na budovanie matematickej teórie aj na využitie matematických poznatkov v praxi.

Mnohé matematické vety sú vyjadrené v tvare ***implikácií*** ($A(x) \Rightarrow B(x)$) alebo v tvare ***ekvivalencií*** ($A(x) \Leftrightarrow B(x)$).

Rozlišujeme vety: ***existenčné*** a ***všeobecné*** .

Existenčná veta má tvar existenčného výroku: Existuje také $x \in D$, že platí $V(x)$.

Príklad na existenčnú vetu: *Existuje záporné reálne číslo, ktoré je menšie ako -5.*

Všeobecná veta má tvar všeobecného výroku: Pre každé $x \in D$ platí $V(x)$.

Príklad na všeobecnú vetu: *V každom rovnobežníku sa uhlopriečky navzájom rozpoľujú.*

Pre všeobecnú vetu v tvare implikácií zavádzame pojmy ako ***obrátená***, ***obmenená*** a ***negácia vety***.

Všeobecná veta je v tvare: $\mathbf{A(x) \Rightarrow B(x)}$
Obmenená veta je v tvare: $\mathbf{B'(x) \Rightarrow A'(x)}$
Obrátená veta: $\mathbf{B(x) \Rightarrow A(x)}$
Negácia vety - implikácie: $\mathbf{A(x) \wedge B'(x)}$

Príklady na jednotlivé typy viet:

Veta: **Pre každé $n \in N$: $2/n \Rightarrow 2/n^2$**

Obmenená veta: **Pre každé $n \in N$: 2 nedelí $n^2 \Rightarrow$ 2 nedelí n**
Obrátená veta: **Pre každé $n \in N$: $2 / n^2 \Rightarrow 2 / n$**
Negácia vety: **Existuje $n \in N$: $2/n \wedge$ 2 nedelí n^2**

Platnosť (pravdivosť) matematických viet pomocou axióm, definícií a už dokázaných viet sa overuje ***dôkazmi matematických viet***.

Ak je veta v tvare implikácie $A(x) \Rightarrow B(x)$, kde **A** je ***predpoklad*** a **B** je ***dôsledok***, potom túto vetu vieme dokázať 4 typmi dôkazov:

- Priamy dôkaz
- Nepriamy dôkaz
- Dôkaz sporom
- Dôkaz matematickou indukciou

1. **Priamy dôkaz** implikácie $\mathbf{A \Rightarrow B}$. Vychádzame z predpokladu implikácie A a priamym reťazcom implikácií B_1, B_2, B_3, ..., **B**, kde B_1, B_2, B_3, ..., B_3 sú axiómy alebo dokázané tvrdenia a **B** je **záver**.

Podstata priameho dôkazu, spočíva vo vytvorení akéhosi reťazca implikácií $A \Rightarrow B_1$, $B_1 \Rightarrow B_2$, ... , $B_k \Rightarrow B$ a následného logického záveru: $\mathbf{A \Rightarrow B}$.
Pravda, nebýva to vždy také jednoduché a často musíme dielčie implikácie $A_i \Rightarrow A_{i+1}$ nahradiť implikáciami typu $(A_i \wedge C_i) \Rightarrow A_{i+1}$, kde C_i je nejaká vhodná veta, už predtým dokázaná, alebo nejaké "samozrejmé" tvrdenie, alebo vhodná konjunkcia niekoľkých už predtým dokázaných viet a podobne.

Príklad 1: Veta: ***Druhá mocnina nepárneho čísla je číslo nepárne***.

Dôkaz: Preformulujme danú vetu - tvrdenie tak, aby malo tvar implikácie:
$\forall n \in N$: ***n je nepárne číslo*** $\Rightarrow n^2$ ***je nepárne číslo*** [$\forall n \in N$: $A(n) \Rightarrow B(n)$]

A(n) : n je nepárne číslo $\Rightarrow B_1(n)$: $n=2k+1$, $k \in N_0 \Rightarrow B_2(n)$: $n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow$
$B_3(n)$: $n^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow B_4(n)$: $n^2 = 2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow B_5(n)$: $n^2 = 2k +1$, $k \in N_0 \Rightarrow$
B(n): n^2 je nepárne číslo

Príklad 2: Veta: ***Ak n je párne číslo, tak aj n^2 je párne číslo.*** ~ $\forall n \in N: 2/n \Rightarrow 2/n^2$

Dôkaz: $A(n): 2/n \Rightarrow B_1(n): n=2k, k\in N \Rightarrow B_2(n): n^2 = (2k)^2 \Rightarrow B_3(n): n^2 = 4k^2 \Rightarrow B_4(n): n^2 = 2(2k^2) \Rightarrow B_5(n): n^2 = 2k, k \in N \Rightarrow B(n): 2/n^2$

2. **Nepriamy dôkaz** používame najmä na dôkaz implikácie **A ⇒ B**. Postupujeme tak, že najskôr ***vytvoríme obmenu implikácie B´⇒ A´*** a túto dokazujeme priamo. $B' \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow Bn \Rightarrow A'$. Využívame skutočnosť, že implikácia a jej obmena majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu, a preto namiesto implikácie môžeme dokazovať jej obmenu.

Príklad 3: Veta: ***Ak n^2 je párne číslo, tak aj n je párne číslo.*** ~ $\forall n \in N: 2/n^2 \Rightarrow 2/n$

Obmena vety: ***$\forall n \in N$: 2 nedelí n ⇒ 2 nedelí n^2***

Dôkaz: ***A(n) : 2 nedelí n*** $\Rightarrow B_1(n): n=2k+1, k\in N_0 \Rightarrow B_2(n): n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow B_3(n): n^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow B_4(n): n^2 = 2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow B_5(n): n^2 = 2k+1, k \in N_0 \Rightarrow$ ***B(n): 2 nedelí n^2***

3. **Dôkaz sporom** vety **A ⇒ B** sa robí tak, ***že sa daná implikácia neguje*** a pomocou reťazca implikácií sa dospeje k logickému sporu. Hovoríme, že sme prišli k sporu. Zo sporu vyplýva, že negované tvrdenie neplatí a teda musí platiť pôvodná veta.

Príklad 4: Veta: $\forall n \in N: 2/n \Rightarrow 2/n^2$

Negácia vety: ***$\exists n \in N$: $2/n \wedge$ 2 nedelí n^2***

Dôkaz: $A(n): 2/n \Rightarrow B_1(n): n=2k, k\in N \Rightarrow B_2(n): n^2 = (2k)^2 \Rightarrow B_3(n): n^2 = 4k^2 \Rightarrow B_4(n): n^2 = 2(2k^2) \Rightarrow B_5(n): n^2 = 2k, k \in N \Rightarrow$ ***B(n): $2/n^2$ – SPOR s predpokladom, že 2 nedelí n^2***, t.j. negovaná veta je nepravdivá ~ pôvodná veta je ***pravdivá***.

Príklad 5: Veta: ***Druhá odmocnina z 2 je iracionálne číslo.*** ~ $\sqrt{2} \notin Q$

Negácia vety: $\sqrt{2} \in Q$

Definícia: Číslo ***a*** je ***racionálne*** práve vtedy, ak sa dá zapísať v tvare zlomku $\frac{m}{n}$,

kde $m\in Z \wedge n\in N$.

Dôkaz: ***Nech*** $\sqrt{2} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n} \wedge$ čísla ***m*** a ***n*** sú ***nesúdeliteľné*** $\Rightarrow m = \sqrt{2}.n \Rightarrow m^2 = 2.n^2 \Rightarrow 2 \mid m^2 \Rightarrow$ ***2 /m*** (príklad 3) $\Rightarrow m = 2.k$ ... dosadením do $m^2 = 2.n^2 \Rightarrow 4.k^2 = 2.n^2 \Rightarrow n^2 = 2.k^2 \Rightarrow$ ***2 /n*** ... ***2 /m ∧ 2 /n*** ~ čísla ***m*** a ***n*** sú ***súdeliteľné***, t.j. dospeli sme k ***sporu***, na základe čoho ***predpoklad – negovaná <u>veta</u> je nepravda***, t.j. ***<u>veta</u> je pravdivá***.

Príklad 6: Veta: ***Všetkých prvočísiel je nekonečne veľa.***

Negácia vety: ***Existuje konečný počet prvočísiel.***

Dôkaz: ***Nech*** $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sú ***všetky*** prvočísla.

Utvorme prirodzené číslo: $\boldsymbol{n = p_1.p_2...p_k + 1}$. Číslo ***n nie je deliteľné žiadnym prvočíslom*** $\boldsymbol{p_i}$, i = 1, 2, ..., k (lebo pri delení týmito prvočíslami vždy vzniká zvyšok 1), preto dané číslo je *prvočíslo rôzne od všetkých* p_i alebo *je deliteľné niektorým ďalším prvočíslom.*
Je to však ***spor s predpokladom***, že prvočísiel je konečne veľa, tak že ***prvočísiel je nekonečne veľa***.

4. **Dôkaz matematickou indukciou** pre vetu typu: Pre každé n є N platí V(n) realizujeme v dvoch krokoch.

1. krok: Dokážeme platnosť tvrdenia pre n = 1, resp. pre najmenší prvok z uvažovanej množiny. Z prvého kroku vyplýva, že existuje aspoň jedno také $n = n_0$, pre ktoré ***platí tvrdenie V(n)*** **- indukčný predpoklad**

2. krok: = indukčný – Dokazujeme implikáciu**:** Ukážeme, že ak tvrdenie platí pre ***n = k*** (viď indukčný predpoklad), potom platí aj pre ***n = k + 1***

Pre každé $n \in N$ platí: z indukčného predpokladu - platnosti V(n) dokážeme, že platí aj V(n+1). Tým je tvrdenie V(n) dokázané, pretože po dôkaze kroku 2 platí: Ak platí V(1) potom platí aj V(2), ak platí V(2) potom platí aj V(3) , ..., t.j. V(n) platí $\forall\ n \in N$.

Dôkaz matematickou indukciou sa často používa pri ***radoch*** a ***postupnostiach***.

Príklad 7: Veta: ***Pre súčet prvých n po sebe idúcich prirodzených čísel platí:***

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Dôkaz: ***1. krok:*** pre n = 1: $1 = \frac{1.2}{2}$ ... 1 = 1 ... platí

2. krok: veta platí pre n = k ... k = 1
Je potrebné zistiť – dokázať, že platí aj pre n = k + 1:

$$\underline{1 + 2 + 3 + \ldots + k} + \boldsymbol{k + 1} = \frac{k.(k+1)}{2} + \boldsymbol{k + 1} = \frac{k.(k+1) + 2.(k+1)}{2} =$$
$$= \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

Ak v rovnosti vety dosadíme za ***n*** výraz ***k + 1***, dostaneme získanú rovnosť $\Rightarrow$ ***veta je pravdivá***.

Ak je veta v tvare **ekvivalencie A(x) ⇔ B(x)**, potom túto vetu dokazujeme v dvoch smeroch:

1. **A(x) ⇒ B(x)**
2. **B(x) ⇒ A(x)**

Dôkazy o deliteľnosti

Definícia: Prirodzené číslo ***a*** je deliteľné prirodzeným číslom ***b*** práve vtedy, ak existuje prirodzené číslo ***k*** s vlastnosťou ***a = b.k***. Číslo ***b*** je ***deliteľom*** čísla ***a***.

Priamy dôkaz

Príklad 8: *Veta:* ***Pre každé prirodzené číslo n platí, že číslo 3 je deliteľom čísla*** $n^3 + 2n$ ~

$\forall n \in N: 3 \mid n^3 + 2n$

Dôkaz: Množinu všetkých prirodzených čísiel z hľadiska deliteľnosti číslom 3 je možné rozdeliť na 3 disjunktné podmnožiny obsahujúce čísla tvaru :

$n = 3k$, $n = 3k + 1$ ***alebo*** $n = 3k + 2$. *Dosadením týchto možností do výrazu* $n^3 + 2n$ dostaneme:

$n^3 + 2n = (3k)^3 + 2.3k = 27k^3 + 6k = 3.(9k^3 + 2k) = \mathbf{3.a}$, $a \in N$, t.j. $3 / n^3 + 2n$

$n^3 + 2n = (3k + 1)^2 + 2.(3k + 1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 6k + 2 = 3.(9k^3 + 9k^2 + 5k + 1) =$

$= \mathbf{3.b}$, $b \in N$, t.j. $3 / n^3 + 2n$

$n^3 + 2n = (3k + 2)^2 + 2.(3k + 2) = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 + 6k + 4 = 3.(9k^3 + 18k^2 + 14k + 4) =$

$= \mathbf{3.c}$, $c \in N$, t.j. $3 / n^3 + 2n$

Vo všetkých troch prípadoch je číslo ***3 deliteľom čísla*** $n^3 + 2n$, *t.j. platí to pre* $\forall n \in N$.

Príklad 9: *Veta:* ***Pre každé prirodzené číslo n platí, že číslo 12 je deliteľom čísla*** $n^5 - n^3$ ~

$\forall n \in N: 12 \mid n^5 - n^3$

Dôkaz: Aj v tomto prípade by sme mohli množinu všetkých prirodzených čísiel z hľadiska deliteľnosti číslom 12 rozdeliť na 12 disjunktných podmnožín obsahujúce čísla tvaru :

$n = 12k$, $n = 12k + 1$, $n = 12k + 2$, ... $n = 12k + 11$ a postupovať ako v príklade č. 7.

Niekedy je výhodnejšie uplatniť aj iný možný a jednoduchší spôsob:

$n^5 - n^3 = n^3(n^2 - 1) = n^3(n-1)(n+1) = n^2(n-1).n.(n+1)$

Je potrebné dokázať, že tento vyraz je deliteľný číslom ***12***, t.j. ***3***-mi aj ***4***-mi.

1) deliteľnosť 3: Vyraz obsahuje súčin troch po sebe idúcich prirodzených čísel , t.j. aspoň jedno z nich bude ***deliteľné 3***-mi a preto ***3***-mi je ***deliteľný*** aj celý výraz (možnosť dôkazu aj využitím n = 3k, n = 3k+1, n = 3k+2)

2) deliteľnosť 4: Ak je n párne, t.j. n=2k, potom vyraz je $4k^2(2k-1)\,2k\,(2k+1)$, t.j. je ***deliteľný štyrmi***.

Ak je n nepárne, t.j. n=2k+1 , vyraz bude $(2k+1)^2(\underline{2k})(2k+1)(\underline{2k+2}) =$

. $\mathbf{4}.(2k+1)^2(\underline{k})(2k+1)(\underline{k+1})$, t.j. je ***deliteľný štyrmi***.

V oboch prípadoch je vyraz ***deliteľný štyrmi***.

Záver: ***Výraz je deliteľný 3-mi aj 4-mi a teda aj 12-timi***.

Poznámka: Deliteľnosť ***štyrmi*** čísla tvaru $n^2(n-1).n.(n+1)$ môžeme zdôvodniť aj spôsobom:

Ak n je párne ~ n = 2k, potom $n^2 = 4k$, t.j. je deliteľné ***štyrmi***.

Ak n je nepárne ~ n = 2k + 1, potom $(n-1).(n+1) = 2k.(2k + 2) = \mathbf{4}.k.(k+1)$, t.j. je deliteľné ***štyrmi***.

*„ Aj v tom je **krása matematiky**.“*

Stručná ukážka výstavby matematickej teórie:

A: Axióma: Ku ***každému*** číslu $\boldsymbol{n \in N}$ existuje jediný **následník** $\boldsymbol{n' \in N}$ čísla $\boldsymbol{n}$, pre ktorý platí: $\boldsymbol{n' = n + 1}$. ... určenie množiny prirodzených čísiel.

B: Definícia: Prirodzené číslo ***d*** delí prirodzené čísla ***n*** práve vtedy, ak ***existuje*** prirodzené číslo ***k*** s vlastnosťou $\boldsymbol{n = k.d}$. Tento fakt zapisujeme **d | n**.

Definícia: Ak pre $\boldsymbol{n \in N}$ platí **2 | n**, číslo ***n*** nazývame ***párne***. V opačnom prípade číslo ***n*** nazývame ***nepárne***.

Definícia: Každé prirodzené číslo, ktoré má ***len dvoch rôznych deliteľov***, číslo ***1*** a ***samo seba***, sa nazýva ***prvočíslo***.

C: Hypotéza: Existuje ***aspoň desať*** rôznych dvojíc ***nepárnych*** prirodzených čísiel, ktorých ***súčet*** je ***párne*** číslo.
Vo <u>veľmi krátkom čase</u> je možné overiť, že je to ***pravdivý výrok***.

Hypotéza: $\boldsymbol{\forall n \in N: 2^n + 1}$ ***je prvočíslo*** : n = 1 ... $\boldsymbol{2^n + 1 = 3}$ ... ***áno***
n = 2 ... $\boldsymbol{2^n + 1 = 5}$ ... ***áno***
n = 3 ... $\boldsymbol{2^n + 1 = 9}$ ... ***NIE***
Za <u>krátky čas</u> je možné overiť, že je to ***nepravdivý výrok***, nakoľko ***existuje*** také prirodzené číslo, pre ktoré to ***NEPLATÍ***.

Hypotéza: ***Súčet ľubovoľných*** dvoch ***nepárnych*** prirodzených čísiel je ***párne*** číslo.
Aj po preverení $\boldsymbol{10^9}$ takýchto súčtov ***nemôžem***e na základe získaných výsledkov prehlásiť, že sa jedná o pravdivý výrok. Je to stále hypotéza.

D: Dôkaz: Nech ***m*** a ***n*** sú dve ***ľubovoľné prirodzené nepárne čísla***, t.j. platí:
$\boldsymbol{m = 2.a + 1 \ \wedge\ n = 2.b + 1,\ a, b \in N}$. Potom $\boldsymbol{m + n = (2.a + 1) + (2.b + 1)}$ ...
... $\boldsymbol{m + n = 2.a + 2.b + 2 = 2.(a + b + 1) = 2.c \wedge c \in N \Rightarrow \underline{2 \mid (m + n)}}$

Na základe získaného výsledku je možné prehlásiť, že ***tretia hypotéza*** je ***pravdivý výrok***.

E: Veta: Takéto ***pravdivé výroky*** v matematike nazývame ***vety***.

Úlohy - súhrn:

1. Dokážte, že $\forall$ n$\in$N platí, že čísla 2; 3; 6 sú deliteľmi $n^3 + 11n$.
2. Pomocou premennej n zapíšte ***päť za sebou*** idúcich prirodzených čísel.
   Dokážte, že súčin týchto čísel je deliteľný 2; 3; 4; 5; 10; 15; 30; 60; 120.
3. Dokážte, že $\forall$ n$\in$N platí: a/ 4 delí $n^4 + 3n^2$
   b/ 12 delí $n^4 - n^2$
   c/ 30 delí $n^5 - n$
   d/ 4 delí $n^4 - n^2$
4. Dokážte, že $\forall$ n$\in$N platí: a/ Ak 3 delí $n^2 + 2$, tak 3 nedelí n.
   b/ Ak 10 delí $n^2 + 6$, tak 5 nedelí n.
   c/ Ak 3 nedelí $n^4 + 2$, tak 3 delí n.
   d/ Ak n^2 je nepárne, tak n je nepárne.
   e/ Ak 5 delí $n^2 + 1$, tak 10 nedelí n.
   f/ Ak 3 nedelí $n^4 - 1$, tak 3 delí n.

5. Rozhodnite, či $\forall$ n$\in$N platí: a/ Ak n^2 je deliteľné 3, tak aj n je deliteľné 3.
   b/ Ak n^2 je deliteľné 11, tak je deliteľné aj 11^2.
6. Dokážte, že $\forall$ n$\in$N platí: $1.2 + 2.3 + ... + n.(n+1) = \dfrac{n.(n+1).(n+2)}{3}$
7. Dokážte, že odmocniny z čísel 3; 5; 7 sú iracionálne čísla.