Priamka a parabola

treba riešiť sústavu rovníc

rovnica priamky – lineárna + rovnica paraboly – kvadratická

zlúčená rovnica – kvadratická

počet riešení sústavy = počet spoločných bodov priamky a paraboly

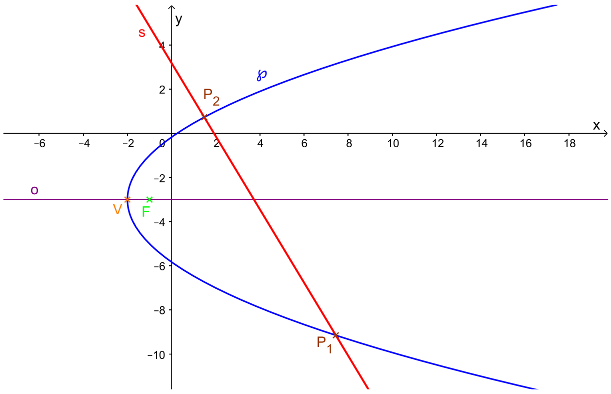
a, dve riešenia ⇒ dva spoločné body ($p \cap \wp = \{P_1; P_2\}$) ⇒ sečnica

b, jedno riešenie ⇒ jeden spoločný bod ($p \cap \wp = \{B\}$)

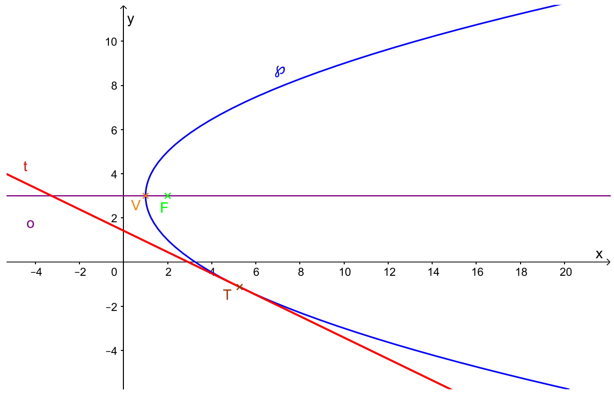
b_1, ak priamka nie je rovnobežná s osou ($p \nparallel o$) ⇒ dotyčnica

b_2, ak priamka je rovnobežná s osou ($p \parallel o$) ⇒ priamka prechádza $\wp$ (sečnica)

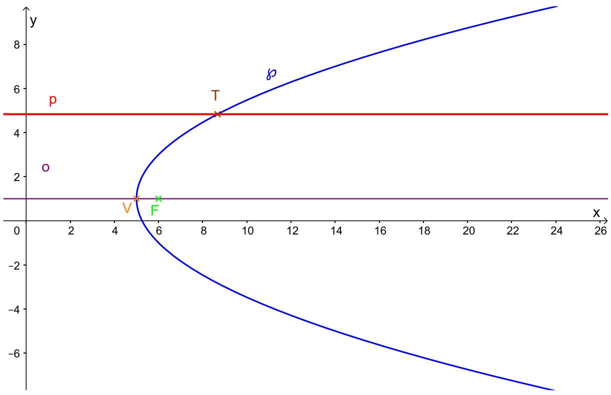
c, nemá riešenie ⇒ nemajú spoločný bod ($p \cap \wp = \emptyset$) ⇒ nesečnica (vonkajšia priamka)



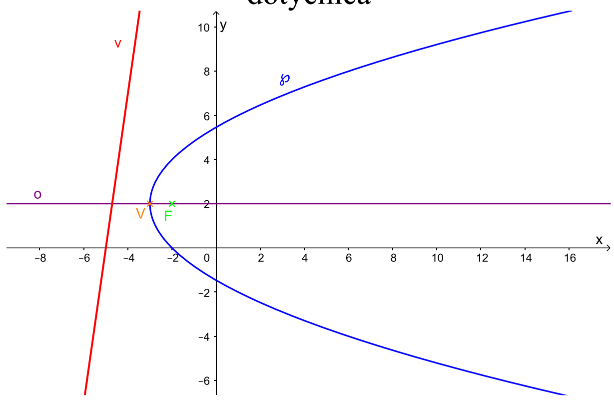
sečnica



dotyčnica



prechádza $\wp$



nesečnica

ak je daná parabola a dotykový bod:

$\wp$: $(x - u)^2 = \pm 2p(y - v)$; $T(x_0; y_0)$ $\qquad$ $\wp$: $(y - v)^2 = \pm 2p(x - u)$; $T(x_0; y_0)$

potom rovnica dotyčnice:

t: $(x_0 - u).(x - u) = \pm 2p[(y - v) + (y_0 - v)]$ $\qquad$ t: $(y_0 - v).(y - v) = \pm 2p[(x - u) + (x_0 - u)]$

príklad:

Vypočítajte súradnice priesečníkov paraboly s priamkou:

a, $\wp$: $x^2 - 4x - 8y - 20 = 0$
a: $x = -2 + 2t$
$y = 3 - t$

b, $\wp$: $y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$
b: $y = -2$

c, $\wp$: $(x + 1)^2 = 6(y - 3)$
c: $2x - 2y + 5 = 0$

b, $\wp$: $(y + 4)^2 = -5(x + 3)$
d: $y = x - \frac{9}{5}$

a, dosadíme do rovnice paraboly

$$(-2 + 2t)^2 - 4(-2 + 2t) - 8(3 - t) - 20 = 0$$
$$4 - 8t + 4t^2 + 8 - 8t - 24 + 8t - 20 = 0$$
$$4t^2 - 8t - 32 = 0 \qquad /:4$$
$$t^2 - 2t - 8 = 0$$
$$(t - 4)(t + 2) = 0$$

$t - 4 = 0$ $\qquad$ $t + 2 = 0$

$t_1 = 4$ $\qquad\qquad$ $t_2 = -2$

má dve riešenia ⇒ priamka a je sečnicou

$x_1 = -2 + 2.4 = 6$ $\qquad\qquad$ $x_2 = -2 + 2.(-2) = -6$

$y_1 = 3 - 4 = -1$ $\qquad\qquad$ $y_2 = 3 - (-2) = 5$

$P_1(6; -1)$; $P_2(-6; 5)$

---

b, $(-2)^2 - 3x - 2(-2) + 7 = 0$

$4 - 3x + 4 + 7 = 0$

$15 - 3x = 0 \qquad /+3x$

$15 = 3x \qquad /:3$

$5 = x$

má jedno riešenie – môže byť dotyčnica alebo priamka prechádzajúca ℘

$k_b = 0 = \frac{0}{s_1}$ ⇒ $\overrightarrow{s_b}(s_1; 0)$ ⇒ priamka b je vodorovná

parabola je ležatá, lebo iba y-ová súradnica je kvadratická ⇒ aj os paraboly je vodorovná

priamka a os sú rovnobežné ⇒ priamka b prechádza parabolou

$P(5; -2)$

---

c, $2x - 2y + 5 = 0 \qquad /+2y$

$2x + 5 = 2y \qquad /:2$

$x + 2,5 = y$

$(x + 1)^2 = 6(x + 2,5 - 3)$

$x^2 + 2x + 1 = 6x + 15 - 18$

$x^2 + 2x + 1 = 6x - 3 \qquad /-6x + 3$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0 \qquad /\sqrt{\ }$

$|x - 2| = 0$

$x - 2 = 0 \qquad /+2$

$x = 2$

má jedno riešenie – môže byť dotyčnica alebo priamka prechádzajúca ℘

$\overrightarrow{n_c}(2; -2)$ ⇒ priamka c nie je ani vodorovná ani zvislá

priamka a os sú rôznobežné ⇒ priamka c je dotyčnicou

$y = 2 + 2,5 = 4,5 = \frac{9}{2}$

$T\left(2; \frac{9}{2}\right)$

---

d, $y = x - \frac{9}{5} \qquad /+\frac{9}{5}$

$y + \frac{9}{5} = x$

$(y + 4)^2 = -5\left(y + \frac{9}{5}\right)$

$y^2 + 8y + 16 = -5y - 9 \qquad /+5y + 9$

$y^2 + 13y + 25 = 0$

$a = 1$ $\qquad\qquad$ $b = 13$ $\qquad\qquad$ $c = 25$

$$y_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-13\pm\sqrt{(-8)^2-4.1.(-48)}}{2.1} = \frac{8\pm\sqrt{64+192}}{2} = \frac{8\pm16}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{24}{2} = 12 \\ \searrow -\frac{8}{2} = -4 \end{array}$$

má dve riešenia ⇒ priamka d je sečnicou

$y_1 = \frac{x^2}{12} = \frac{12^2}{12} = 12$

$y_2 = \frac{x^2}{12} = \frac{(-4)^2}{12} = \frac{4}{3}$

$P_1(12; 12)$; $P_2\left(-4; \frac{4}{3}\right)$

Napíšte rovnicu dotyčnice paraboly v bode T:

a, $(x + 2)^2 = 5(y - 5)$; $T(x_T > 0; 8{,}2)$ b, $y^2 - 6x + 2y + 19 = 0$; $T(4{,}5; y_T < 0)$

a, vypočítame chýbajúcu súradnicu dotykového bodu – dosadíme do rovnice paraboly

$(x + 2)^2 = 5(8{,}2 - 5)$

$(x + 2)^2 = 5.3{,}2$

$(x + 2)^2 = 16 \quad /\sqrt{\ }$

$|x + 2| = 4$

$x + 2 = 4 \qquad x + 2 = -4$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -6$

$T(2; 8{,}2)$

nakoľko iba parametrická rovnica priamky obsahuje súradnice bodu, ktorým prechádza:

$t: x = 2 + s_1 t$

$y = 8{,}2 + s_2 t$

kde smerový vektor dotyčnice je: $\vec{s}(s_1; s_2)$

ak dotyčnica nie je rovnobežná ani jednou z ôs, jednu súradnicu si môžeme zvoliť (nie 0)

keďže x je iba na druhú, jednoduchšia bude zlúčená rovnica ak si zvolíme $s_1 = 1$ (nebude obsahovať člen obsahujúci $s_1^2.t^2$)

$\vec{s}(1; s_2)$

$t: x = 2 + 1.t \ = 2 + t$

$y = 8{,}2 + s_2 t = 8{,}2 + s_2 t$

dosadíme do rovnice paraboly

$(2 + t + 2)^2 = 5(8{,}2 + s_2 t - 5)$

$(t + 4)^2 = 5(3{,}2 + s_2 t)$

odstránime zátvorky a anulujeme rovnicu

$t^2 + 8t + 16 = 16 + 5s_2 t \quad /-16 - 5s_2 t$

$t^2 + 8t - 5s_2 t = 0$

vyjmeme t z dvoch lineárnych členov

$t^2 + t(8 - 5s_2) = 0$

$a = 1 \qquad b = 8 - 5s_2 \qquad c = 0$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D: jedno riešenie ⇔ D = 0

$D = b^2 - 4ac = (8 - 5s_2)^2 - 4.1.0 = (8 - 5s_2)^2$

$(8 - 5s_2)^2 = 0 \quad /\sqrt{\ }$

$8 - 5s_2 = 0 \quad /+5s_2$

$8 = 5s_2 \quad /:5$

$1{,}6 = s_2$

takže konečný tvar parametrickej rovnice dotyčnice:

$t: x = 2 + t \quad /.8$

$y = 8{,}2 + 1{,}6t \quad /.(-5)$

$8x = 16 + 8t$

$-5y = -41 - 8t$

$8x - 5y = -25$

$t: 8x - 5y + 25 = 0$

---

b, $y^2 - 6.4{,}5 + 2y + 19 = 0$

$y^2 + 2y - 8 = 0$

$(y + 4)(y - 2) = 0$

$y + 4 = 0 \qquad y - 2 = 0$

$y_1 = -4 \qquad y_2 = 2$

$T(4{,}5; 2)$

$t: x = 4{,}5 + s_1 t$
$\quad y = 2 + s_2 t$
$\vec{s}(s_1; 1)$
$t: x = 4{,}5 + s_1 t = 4{,}5 + s_1 t$
$\quad y = 2 + 1.t \;= 2 + t$

$$(2 + t)^2 - 6(4{,}5 + s_1 t) + 2(2 + t) + 19 = 0$$
$$4 + 4t + t^2 - 27 - 6s_1 t + 4 + 2t + 19 = 0$$
$$t^2 + t(6 - 6s_1) = 0$$

a = 1 *b* = $6 - 6s_1$ *c* = 0

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D: jedno riešenie ⇔ D = 0

$D = b^2 - 4ac = (6 - 6s_1)^2 - 4.1.0 = (6 - 6s_1)^2$

$(6 - 6s_1)^2 = 0 \quad /\sqrt{\ }$
$6 - 6s_1 = 0 \quad /+6s_1$
$6 = 6s_1 \quad /:6$
$1 = s_1$

$t: x = 4{,}5 + t$
$\quad y = 2 + 1t \quad /.(-1)$

$x = 4{,}5 + t$
$-y = -2 - t$
$x - y = 2{,}5$

$t: 2x - 2y - 5 = 0$

Napíšte rovnicu dotyčnice k parabole rovnobežnú s danou priamkou: $\wp: (x + 4)^2 = -4(y - 3)$; p: $3x - y + 1 = 0$

zo všeobecnej rovnice priamky určíme normálový vektor: $\vec{n}(3; -1)$
rovnobežné priamky majú rovnobežné normálové vektory → môžeme aj ten použiť
poznáme normálový vektor dotyčnice ⇒ napíšeme predbežný tvar všeobecnej rovnice

$t: 3x - y + q = 0$

treba určiť hodnotu q tak, aby priamka bola dotyčnicou (aby sústava mala jedno riešenie)
vyjadrime y z rovnice paraboly a dosadíme do rovnice priamky

$3x + q = y$

$$(x + 4)^2 = -4(3x + q - 3)$$
$$x^2 + 8x + 16 = -12x - 4q + 12 \quad /+12x + 4q - 12$$
$$x^2 + 20x + 4q + 4 = 0$$

a = 1 *b* = 20 *c* = $4q + 4$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D: jedno riešenie ⇔ D = 0

$D = b^2 - 4ac = 20^2 - 4.1.(4q + 4) = 400 - 16q - 16 = 384 - 16q$

$384 - 16q = 0 \quad /+16q$
$384 = 16q \quad /:16$
$24 = q$

$t: 3x - y + 24 = 0$

Napíšte rovnicu dotyčnice k parabole kolmú na danú priamku: $\wp: y^2 + 4x - 4y - 16 = 0$; p: $y = -x + 12$

$k_p = -1 \;\Rightarrow\; k_t = -\frac{1}{k_p} = 1$

$t: y = 1.x + q$
$\quad y - q = x$

$$y^2 + 4(y - q) - 4y - 16 = 0$$
$$y^2 + 4y - 4q - 4y - 16 = 0$$
$$y^2 - 4q - 16 = 0$$

a = 1 *b* = 0 *c* = $-4q - 16$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D: jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.1.(-4q - 16) = 16q + 64$

$16q + 64 = 0 \quad /-64$

$16q = -64 \quad /:16$

$q = -4$

t: $y = x - 4$