Vlastnosti kombinačných čísel

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov bežne zapisujeme v tvare $C_k(n)$. Ale ak využijeme tie hodnoty v iných vzťahoch, výpočtoch (napr. binomická veta), používame inú symboliku. Ten druhý tvar dostal kratší názov, ako kombinácie k-tej triedy z n prvkov.

kombinačné číslo – $\binom{n}{k}$ „n nad k“

V.

a, $\binom{n}{0} = 1$

z n prvkovej množiny iba jednu prázdnu podmnožinu (triviálna podmnožina) môžeme vytvoriť – existuje iba jedna prázdna množina

b, $\binom{n}{1} = n$

z n prvkovej množiny n rôznych jednoprvkových podmnožinu môžeme vytvoriť – každý prvok ako prvok jednej podmnožiny

c, $\binom{n}{n} = 1$

z n prvkovej množiny iba jednu podmnožinu môžeme vytvoriť so všetkými n prvkami základnej množiny (triviálna podmnožina)

d, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

z n prvkovej množiny presne toľko rôznych k prvkových podmnožín môžeme vytvoriť koľko (n – k) prvkových – ak vyberám z n prvkovej množiny k prvkov v doplnku (doplnkovej množine) ostane presne (n – k) prvkov ⟶ s každou ďalšou podmnožinou vznikne aj iná doplnková množina

e, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dô.

$$\binom{n}{0} = C_0(n) = \frac{n!}{0!.(n-0)!} = \frac{n!}{1.n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = C_1(n) = \frac{n!}{1!.(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{1.(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n} = C_n(n) = \frac{n!}{n!.(n-n)!} = \frac{n!}{n!.0!} = \frac{1}{1} = 1$$

Ľ: $\binom{n}{k} = C_k(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$

P: $\binom{n}{n-k} = C_{n-k}(n) = \frac{n!}{(n-k)!.[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!.[n-n+k]!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$

Ľ = P

Ľ: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = C_k(n) + C_{k+1}(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!.[n-(k+1)]!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!.[n-k-1]!} =$

$= \frac{n!}{k!.(n-k).(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1).k!.(n-k-1)!} = \frac{n!.(n-k)+n!.(k+1)}{(k+1).k!.(n-k).(n-k-1)!} = \frac{n!.n-n!.k+n!.k+n!.1}{(k+1)!.(n-k)!} = \frac{n!.n+n!.1}{(k+1)!.(n-k)!} =$

$= \frac{n!.(n+1)}{(k+1)!.(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.(n-k)!}$

P: $\binom{n+1}{k+1} = C_{k+1}(n+1) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.[(n+1)-(k+1)]!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.[n+1-k-1]!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!.(n-k)!}$

Ľ = P

Z každej n prvkovej množiny môžeme vytvoriť podmnožiny s rôznym počtom prvkov: od nulprvkovej (prázdnej) podmnožiny až po podmnožinu obsahujúcu všetky prvky základnej množiny – n prvková podmnožina. To znamená, že kombinačné čísla pre konkrétne číslo n idú od $\binom{n}{0}$ po $\binom{n}{n}$.

Tieto čísla usporiadame do trojuholníka tak, že v každom riadku budú kombinačné čísla pre konkrétnu hodnotu n – usporiadané podľa k. Riadky budú usporiadané podľa n – každý ďalší riadok obsahuje o jedno viac kombinačných čísel. A čísla v ďalšom riadku sú tak písané, aby zapadali medzi čísla z predchádzajúceho riadka. Potom dostaneme takzvaný ***Pascalov trojuholník***:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n = 0 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
n = 1 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
n = 2 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
n = 3 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
n = 4 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
n = 5 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
n = 6 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Mohli by sme počítať každé kombinačné číslo pomocou vzorca (kombinácie k-tej triedy z n prvkov), ale je na to jednoduchší spôsob – využime vety o kombinačných číslach. Čo znamenajú tie vety:

V: a, každý riadok sa začína číslom 1

V: b, v každom riadku na druhom mieste je číslo n

V: c, každý riadok končí číslom 1

V: d, v každom riadku sú čísla symetricky usporiadané – sú rovnaké od kraja
(z vety b, ⇒ predposledné číslo je znovu n)

V: e, ak sčítame dve za sebou idúce čísla v riadku, dostaneme číslo z ďalšieho riadku písané medzi tie čísla

Stačí ale využiť iba tri vety z piatich – a, b, a e,. Ak napíšem na prvé a posledné miesto jednotky, ostatné čísla v riadku už dostanem sčítavaním susedných dvoch z predchádzajúceho riadku.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccccccccc}
n = 0 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
n = 1 & & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
n = 2 & & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
n = 3 & & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
n = 4 & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
n = 5 & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
n = 6 & & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
n = 7 & & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
n = 8 & & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
n = 9 & & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
n = 10 & 1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array}
$$

príklad:

Vypočítajte:

a, $\binom{10}{4}$ b, $\binom{11}{4} + \binom{11}{6}$ c, $\binom{9}{3} + \binom{9}{2} + \binom{10}{6}$

$\binom{10}{4} = C_4(10) = \frac{10!}{4!.6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.6!} = 10.3.7 = 210$

---

v b, otázke využijeme najprv štvrtú vetu (d,) a potom piatu (e,)

$\binom{11}{6} = \binom{11}{5} \rightarrow \binom{11}{4} + \binom{11}{5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!.7!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5.4.3.2.7!} = 11.9.8 = 792$

---

v c, otázke využijeme najprv piatu vetu (e,), potom štvrtú (d,) a znovu piatu

$\binom{9}{3} + \binom{9}{2} = \binom{10}{3} \wedge \binom{10}{3} = \binom{10}{7} \rightarrow \binom{10}{7} + \binom{10}{6} = \binom{11}{7} = \frac{11!}{7!.4!} = \frac{11.10.9.8.7!}{7!.4.3.2} = 11.10.3 = 330$

Vyjadrite jediným kombinačným číslom:

a, $\binom{13}{8} + \binom{13}{4}$ b, $\binom{11}{7} - \binom{10}{3}$ c, $\binom{17}{11} + \binom{17}{7} + \binom{18}{8} + \binom{19}{7}$

$\binom{13}{8} + \binom{13}{4} = \binom{13}{5} + \binom{13}{4} = \binom{14}{5}$

$\binom{11}{7} - \binom{10}{3} = \binom{11}{7} - \binom{10}{7} = \binom{10}{6}$

$\binom{17}{11} + \binom{17}{7} + \binom{18}{8} + \binom{19}{7} = \binom{17}{11} + \binom{17}{10} + \binom{18}{8} + \binom{19}{7} = \binom{18}{11} + \binom{18}{8} + \binom{19}{7} = \binom{18}{11} + \binom{18}{10} + \binom{19}{7} =$
$= \binom{19}{11} + \binom{19}{7} = \binom{19}{11} + \binom{19}{12} = \binom{20}{12}$

Upravte:

a, $\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$

b, $\binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$

$\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{5} = \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{5} = \binom{n+2}{5}$

$\binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} =$
$= \binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} =$
$= \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \binom{n+2}{k} + \binom{n+2}{k+2}$

Riešte rovnice:

a, $\binom{x-1}{x-2} + 2.\binom{x}{x-1} = \binom{7}{5} + 2$

b, $\binom{x}{x-2} - \binom{x-3}{x-5} = 15$

c, $\binom{x}{2} + \binom{x-2}{x-4} = \binom{9}{3} + 7$

d, $\binom{x+1}{x-1} - 4.\binom{x-1}{x-2} = \binom{x}{x-1}.\binom{x-1}{x-2} - \binom{x+2}{2}$

$x \geq 2$

$$\binom{x-1}{x-2} + 2.\binom{x}{x-1} = \binom{7}{5} + 2$$
$$\frac{(x-1)!}{(x-2)!.[x-1-(x-2)]!} + 2.\frac{x!}{(x-1)!.[x-(x-1)]!} = \frac{7!}{5!.2!} + 2$$
$$\frac{(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.1!} + 2.\frac{x.(x-1)!}{(x-1)!.1!} = \frac{7.6.5!}{5!.2} + 2$$
$$x - 1 + 2x = 21 + 2 \qquad /+1$$
$$3x = 24 \qquad /:3$$
$$x = 8$$

$x \geq 5$

$$\binom{x}{x-2} - \binom{x-3}{x-5} = 15$$
$$\frac{x!}{(x-2)!.[x-(x-2)]!} - \frac{(x-3)!}{(x-5)!.[x-3-(x-5)]!} = 15$$
$$\frac{x.(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.2!} - \frac{(x-3).(x-4).(x-5)!}{(x-5)!.2!} = 15 \qquad /.2$$
$$x.(x-1) - (x-3).(x-4) = 30$$
$$x^2 - x - (x^2 - 4x - 3x + 12) = 30$$
$$x^2 - x - x^2 + 7x - 12 = 30 \qquad /+12$$
$$6x = 42 \qquad /:6$$
$$x = 7$$

$x \geq 4$

$$\binom{x}{2} + \binom{x-2}{x-4} = \binom{9}{3} + 7$$
$$\frac{x!}{2!.(x-2)!} + \frac{(x-2)!}{(x-4)!.[x-2-(x-4)]!} = \frac{9!}{3!.6!} + 7$$
$$\frac{x.(x-1).(x-2)!}{2.(x-2)!} + \frac{(x-2).(x-3).(x-4)!}{(x-4)!.2!} = \frac{9.8.7.6!}{3.2.6!} + 7$$
$$\frac{x.(x-1)}{2} + \frac{(x-2).(x-3)}{2} = 3.4.7 + 7 \qquad /.2$$
$$x.(x-1) + (x-2).(x-3) = 168 + 14$$
$$x^2 - x + x^2 - 3x - 2x + 6 = 182 \qquad /-182$$
$$2x^2 - 6x - 176 = 0 \qquad /:2$$
$$x^2 - 3x - 88 = 0$$
$$(x-11).(x+8) = 0$$

$x - 11 = 0 \qquad\qquad x + 8 = 0$

$x_1 = 11 \qquad\qquad x_2 = -8$

$x \geq 2$

$$\binom{x+1}{x-1} - 4.\binom{x-1}{x-2} = \binom{x}{x-1}.\binom{x-1}{x-2} - \binom{x+2}{2}$$

$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!.[x+1-(x-1)]!} - 4.\frac{(x-1)!}{(x-2)!.[x-1-(x-2)]!} = \frac{x!}{(x-1)!.[x-(x-1)]!}.\frac{(x-1)!}{(x-2)!.[x-1-(x-2)]!} - \frac{(x+2)!}{2!.(x+2-2)!}$$

$$\frac{(x+1).x.(x-1)!}{(x-1)!.2!} - 4.\frac{(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.1!} = \frac{x.(x-1)!}{(x-1)!.1!}.\frac{(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.1!} - \frac{(x+2).(x+1).x!}{2!.x!}$$

$$\frac{(x+1).x}{2} - 4.\frac{x-1}{1} = \frac{x}{1}.\frac{x-1}{1} - \frac{(x+2).(x+1)}{2} \qquad /.2$$

$$(x + 1).x - 2.4.(x - 1) = 2.x.(x - 1) - (x + 2).(x + 1)$$

$$x^2 + x - 8x + 8 = 2x^2 - 2x - (x^2 + x + 2x + 2)$$

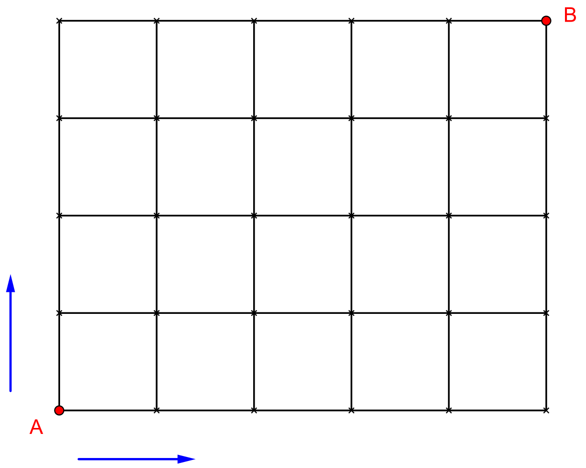
$$x^2 - 7x + 8 = 2x^2 - 2x - x^2 - 3x - 2$$

$$x^2 - 7x + 8 = x^2 - 5x - 2 \qquad /-x^2 + 7x + 2$$

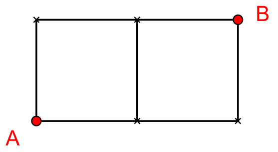
$$10 = 2x \qquad /:2$$

$$5 = x$$

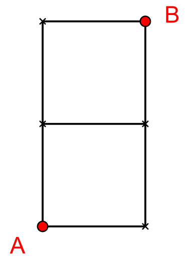
Koľkými spôsobmi môžeme prejsť po mriežke z bodu A do bodu B, ak sú dovolené iba dva smery pohybu: doprava a hore (najkratšia cesta)?



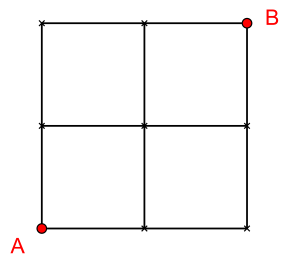
Začneme jednoduchšími prípadmi.



prípad č. 1

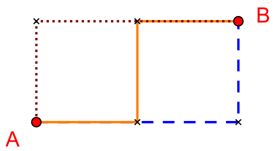


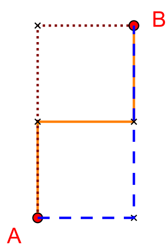
prípad č. 2



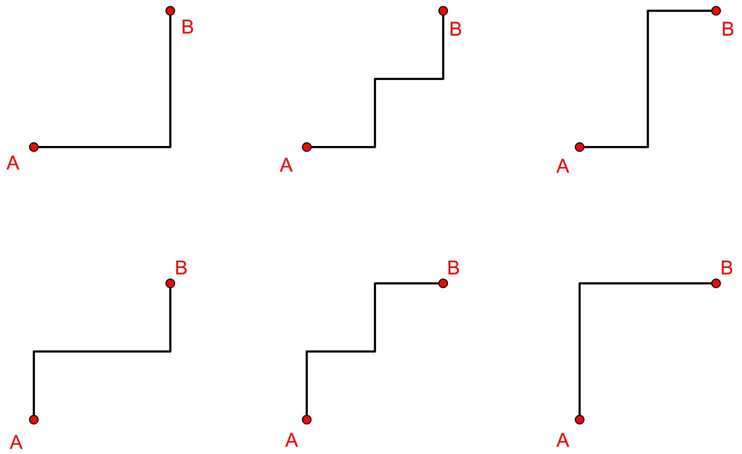
prípad č. 3

- prvý a druhý prípad sa podobajú (iba rozmery sú vymenené) – ľahko nájdeme všetky tri cesty (sú označené rôznymi farbami a typmi čiar)



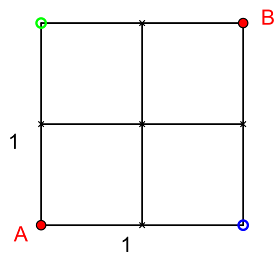


- aj tretí môžeme zvládnuť



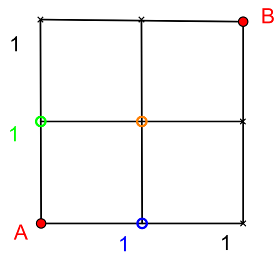
Pri vyšších rozmeroch podobne nájsť všetky rôzne cesty je časovo aj psychicky náročné → musíme nájsť jednoduchší spôsob.

Označme každý bod mriežky číslom, koľkými spôsobmi vedie cesta do toho bodu. Začnime susednými bodmi bodu A – bod napravo a bod nad. Do týchto bodov jedine z bodu A môžeme prichádzať → napíšme číslo 1.

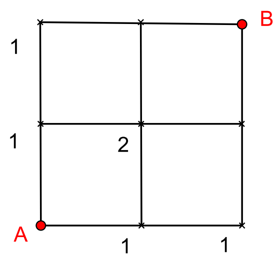


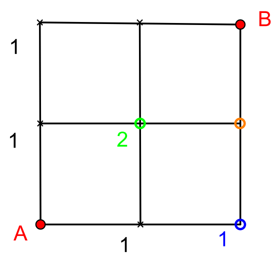
- do modrého bodu takisto iba z bodu od toho naľavo sa viem dostať (z bodu A dvakrát doprava)
- do zeleného bodu iba z bodu od toho nadol sa viem dostať (z bodu A dvakrát hore)

Preto aj do týchto bodov mriežky píšeme jednotky.

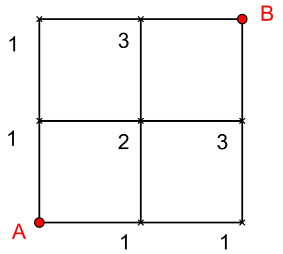


- do oranžového bodu môžeme prichádzať aj z modrého aj zo zeleného bodu
- nakoľko do tých bodov sme sa dostali jediným spôsobom (sú tam jednotky) ich súčet dá počet ciest do žltého bodu: 1 + 1 = 2 → píšeme dvojku

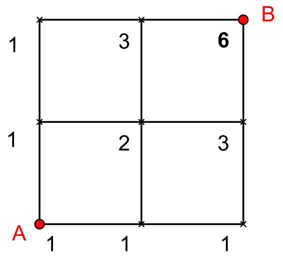




- do ďalšieho oranžového bodu môžeme prichádzať z modrého alebo zo zeleného bodu
- znovu sčítame tie čísla 1 + 2 = 3 → píšeme trojku
- takisto aj nad zeleným bodom vychádza súčet 2 + 1 = 3



Posledný bod je samotný cieľ – bod B. Z dvoch susedných bodov môžeme prichádzať – tam sú trojky. Ich súčet dá počet všetkých možností, čo sme aj našli: 3 + 3 = 6.

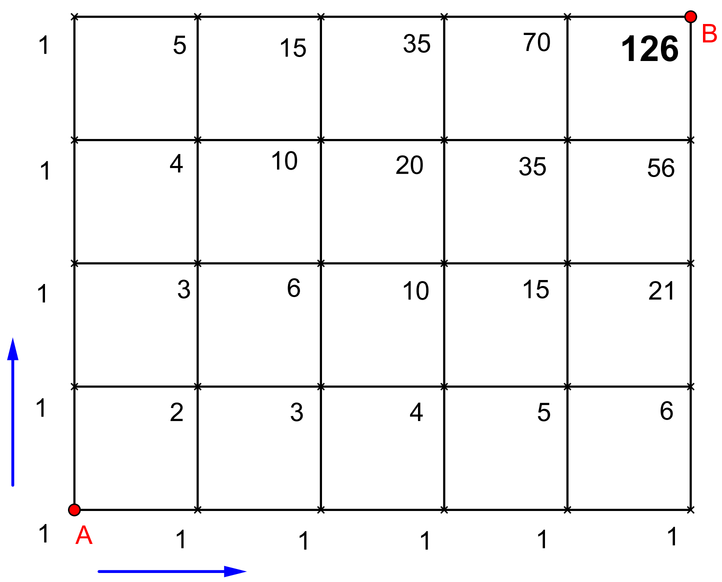


P. *Ešte sme doplnili obrázok pri bode A číslom 1.*

Náš postup sme nedávno použili – v Pascalovom trojuholníku. Len tu máme ten trojuholník otočený a vystrihnutý (neobsahuje všetky riadky celé).

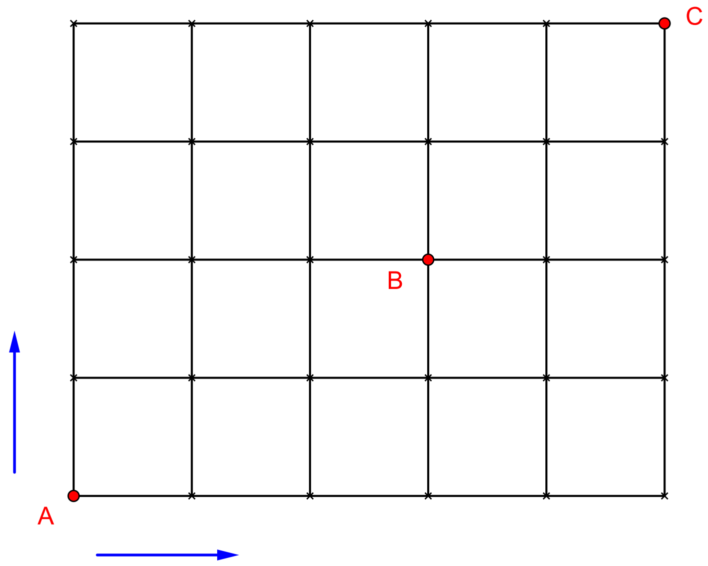
P. Nie náhodou riešime práve takýto typ príkladu po vlastnostiach kombinačných čísel.

Tak dokončme pôvodný príklad týmto spôsobom:
- dolné a ľavé krajné body dostanú čísla 1 (tam vedie len jedna cesta – iba doprava alebo iba hore)
- ostatné body mriežky dostanú súčet čísel dvoch bodov: bodu spod a bodu naľavo



n = 126

Koľkými rôznymi cestami môžeme prejsť po mriežke z bodu A do bodu C cez bod B, ak sú dovolené iba dva smery pohybu: doprava a hore (najkratšia cesta)?



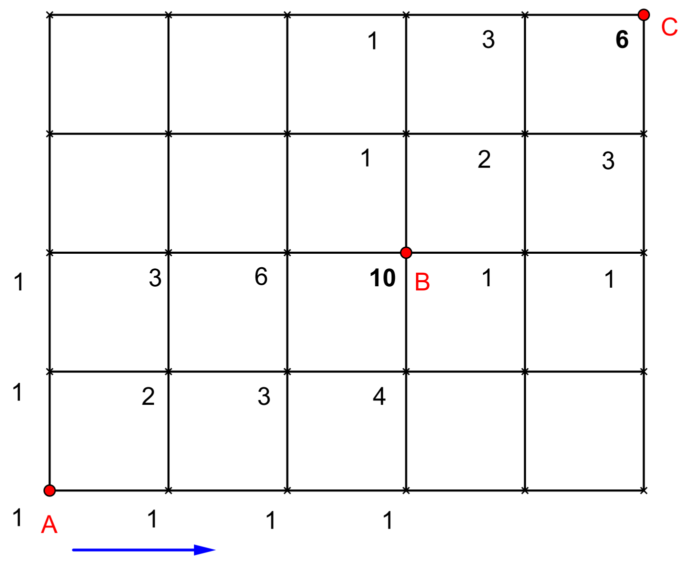
Bez toho, aby sme riešili príklad, môžem prísť na to, že ten počet bude menší (pričom rozmer veľkej mriežky ostal). Vyplýva to z toho, že sú body mriežky, ktorými neprechádza žiadna cesta – body napravo od obdĺžnika AB; a body nad obdĺžnikom AB (z tých bodov sa už nedostanem do bodu B – nakoľko sa nemôžem hýbať doľava ani dole).

Príklad riešime, ako keby sme mali dve mriežky:

jednu tvaru obdĺžnika s uhlopriečkou AB

druhú tvaru štvorca s uhlopriečkou BC

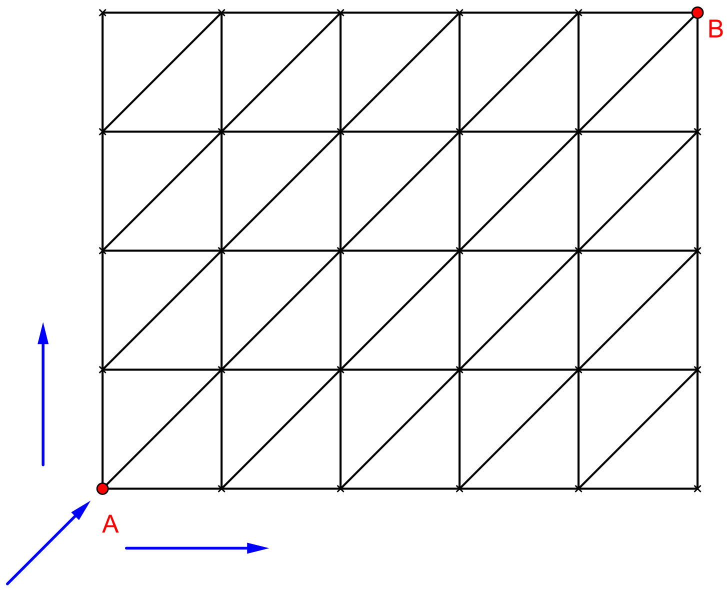
V cieli prvej mriežky (v bode B) dostaneme nejaké číslo, podobne aj druhej (v bode C) – odpoveď na otázku dostaneme, ak tieto počty ciest vynásobíme.



n = 10.6

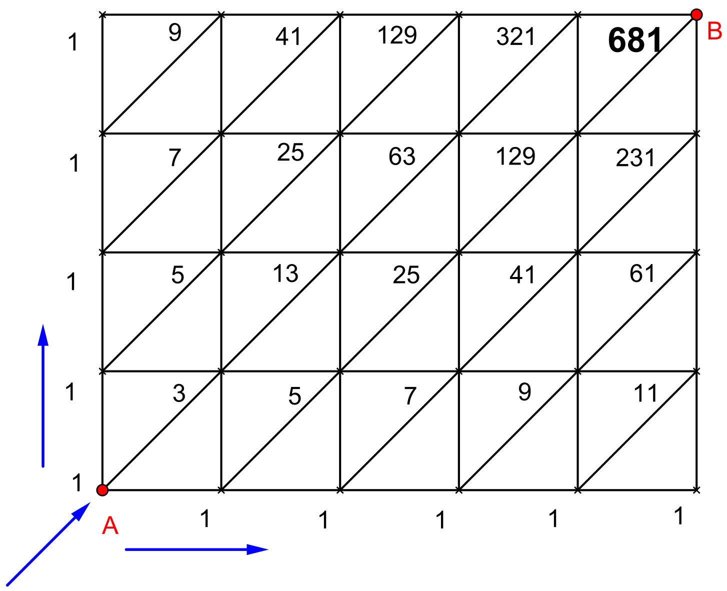
n = 60

Koľkými rôznymi cestami môžeme prejsť z bodu A do bodu B, ak sú dovolené iba tri smery pohybu: doprava, hore a po uhlopriečkach smerujúcich z bodu A do B?



Podobne postupujeme aj tu, len pri výpočtoch ciest bude zmena.

- dolné a ľavé krajné body dostanú čísla 1
- ostatné body mriežky dostanú súčet čísel troch bodov: bodu spod, bodu naľavo a bodu po uhlopriečke



n = 681