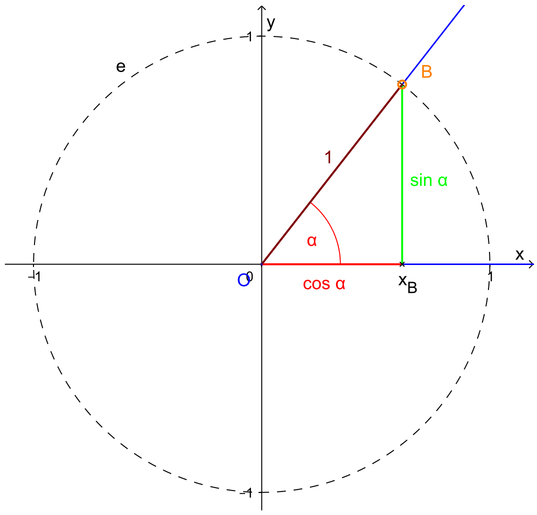
A szögfüggvények további tulajdonságai
(Ďalšie vlastnosti goniometrických funkcií)

Ábránkon a B pont az egységkör egy pontja. Rajta keresztül az y tengellyel párhuzamosat húzva derékszögű háromszög keletkezik. Átfogója az egységkör sugara – ezért hossza 1, befogói pedig a B pont két koordinátája. Derékszögű háromszögben érvényes Pitagorasz tétele – így kapunk egy összefüggést, ami összeköti egy szög szinuszát és koszinuszát. Továbbá a belső szögek szögfüggvényei kifejezhetők oldalak arányaiként – újabb összefüggések.



T. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

T. $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

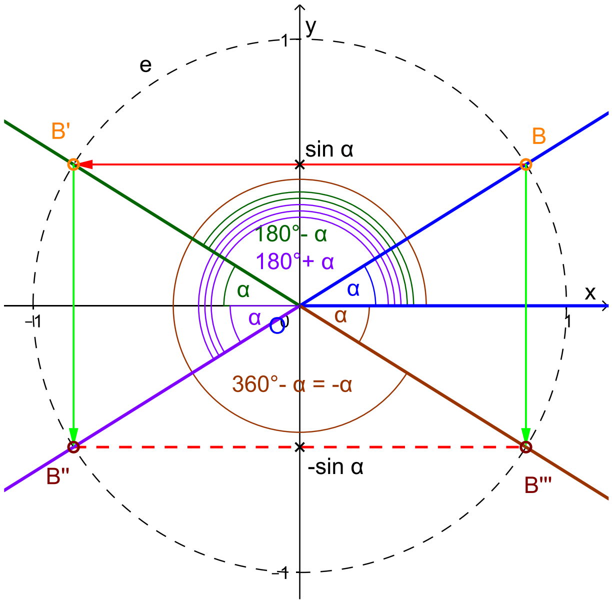
$\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\text{tg}\ \alpha . \text{cotg}\ \alpha = 1$

Keressünk olyan szögeket, melyeknél azonos vagy esetleg ellentett szögfüggvényértéket mutat valamely szögfüggvény.

mivel a szinusz az egységkörön fekvő pont y koordinátája, ezért vele azonos y koordinátájú pontot az y tengellyel szimmetrikusan (tengelyesen tükrözve) találunk – a B′ pont

ellentett szinusz értékeket a B és a B′ ponthoz pedig az x tengellyel szimmetrikusan kapunk – a B‴ és a B″ pontokat

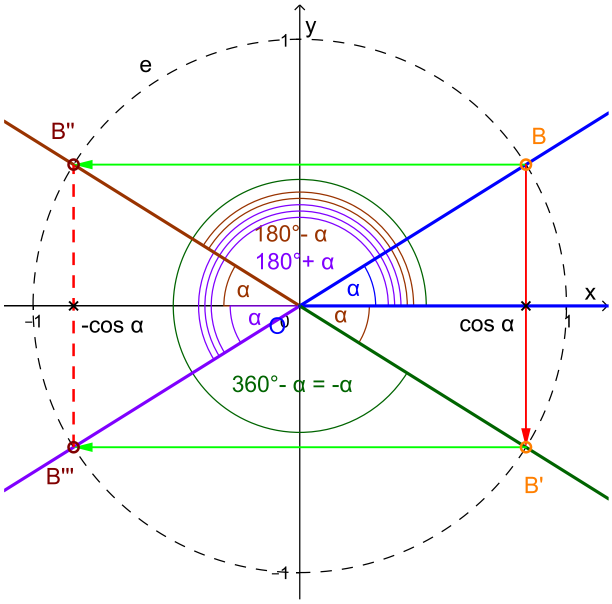


$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ $\sin x = \sin(\pi - x)$

$\sin\alpha = -\sin(180° + \alpha)$ $\sin x = -\sin(\pi + x)$

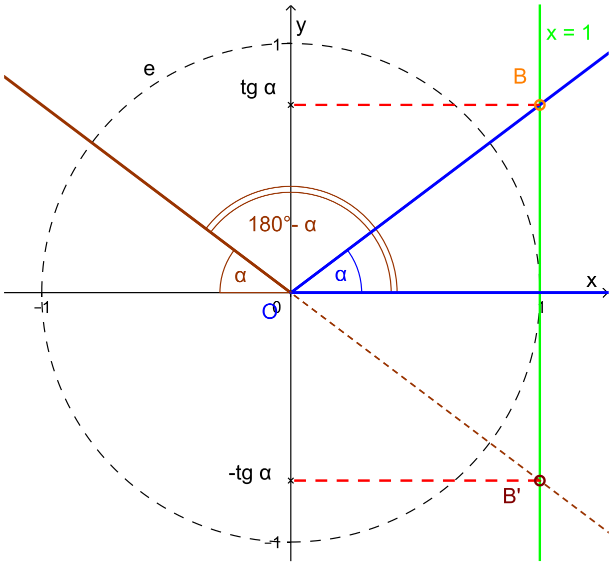
$\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha) = -\sin(-\alpha)$ $\sin x = -\sin(2\pi - x) = -\sin(-x)$

mivel a koszinusz az egységkörön fekvő pont x koordinátája, ezért vele azonos x koordinátájú pontot az x tengellyel szimmetrikusan (tengelyesen tükrözve) találunk – a B′ pont
ellentett koszinusz értékeket a B és a B′ ponthoz pedig az y tengellyel szimmetrikusan kapunk – a B″ és a B‴ pontokat



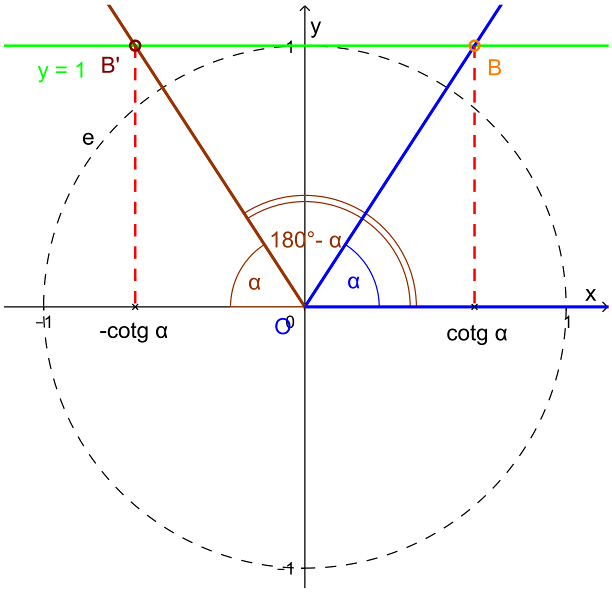
cos α = cos (360° – α) = cos (-α)   cos x = cos (2π – x) = cos (-x)
cos α = -cos (180° – α)   cos x = -cos (π – x)
cos α = -cos (180° + α)   cos x = -cos (π + x)

mivel a tangens az az x = 1 egyenletű érintő pontjának y koordinátája, vele azonos x koordinátájú pontot (tulajdonképpen ellentettet – de a mozgó szár tartóegyenesén fekszik) az origó szerint szimmetrikusan találunk (középpontosan tükrözve), viszont ez a szög pontosan egy periódussal több (180° = π rad) – így a tangens tulajdonságai között ez már szerepel
ellentett tangens értéket az x tengellyel szimmetrikusan (tengelyesen tükrözve) találunk – a B′ pont



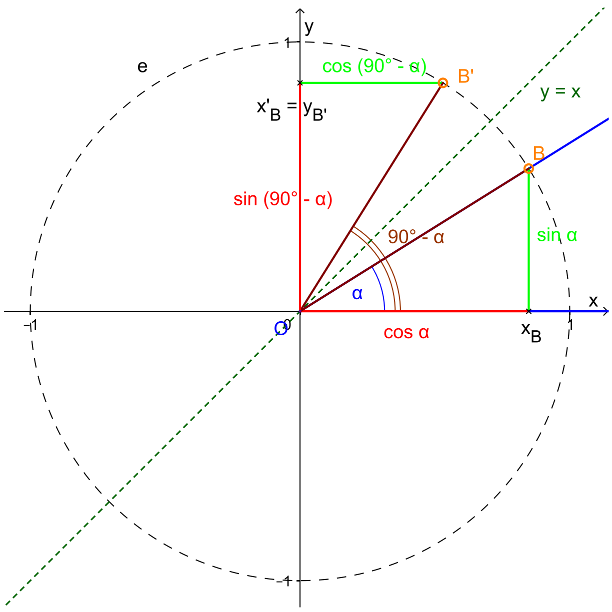
tg α = -tg (180° – α)   tg x = -tg (π – x)

mivel a kotangens az az y = 1 egyenletű érintő pontjának x koordinátája, vele azonos y koordinátájú pontot (tulajdonképpen ellentettet – de a mozgó szár tartóegyenesén fekszik) az origó szerint szimmetrikusan találunk (középpontosan tükrözve), viszont ez a szög pontosan egy periódussal több (180° = π rad) – így a kotangens tulajdonságai között ez már szerepel
ellentett kotangens értéket az y tengellyel szimmetrikusan (tengelyesen tükrözve) találunk – a B′ pont



$\text{cotg } \alpha = \text{-cotg } (180° - \alpha)$ $\text{cotg } x = \text{-cotg } (\pi - x)$

További összefüggéseket találhatunk, ha a pótszögek szögfüggvényértékeit vizsgáljuk.
A B pont az egységkörön az α irányított szöghöz tartozik. Ha az *y* tengellyel párhuzamosan derékszögű háromszögre egészítjük ki, akkor ennek befogói hossza cos α és sin α – mint az egységkörön fekvő pont koordinátái
Ha elkészítjük a BOx_B háromszög tengelyes tükörképét az y = x egyenletű egyenes szerint, a $B'Oy_{B'}$ háromszög keletkezik.

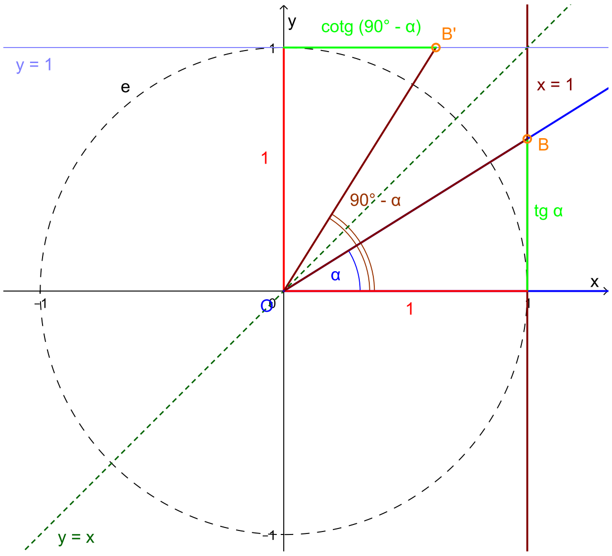


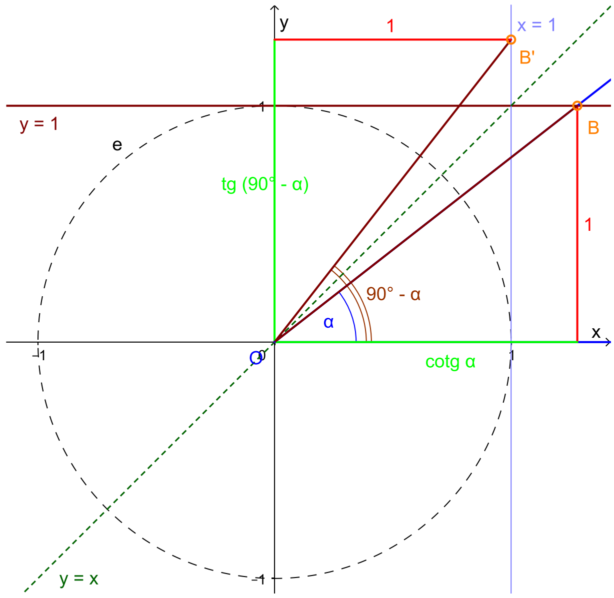
A B′ ponthoz a 90° – α irányított szög tartozik: és a B′ pontnak a koordinátái felcserélődtek. Ezért:
T.

$\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$ $\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Hasonlóan járunk el a tangens és a kotangens esetében is. Ismét tengelyesen tükrözzük ábránkat az y = x egyenletű egyenes szerint: a B pontból → B′ pont, az x = 1 érintőből → az y = 1 egyenest.





A B′ ponthoz a 90° – α irányított szög tartozik: és a B′ pontnak a koordinátái felcserélődtek. Ezért:
T.

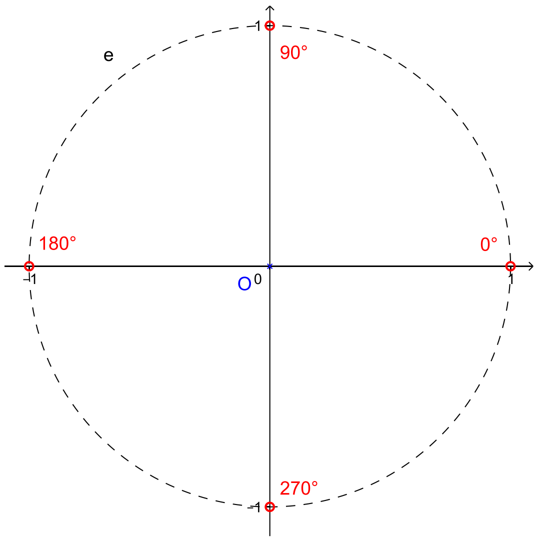
$$\text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\ (90° - \alpha) \qquad \text{tg}\ x = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \text{tg}\ (90° - \alpha) \qquad \text{cotg}\ x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

M. Pontosan ezeket a tulajdonságokat használták fel a múltban, mikor a matematikai táblázatokat készítették – egy táblázatba kerültek a hegyesszögek szinusz és koszinusz értékeik (szintén egy másikba a tangens és kotangens értékek is). Felülről olvasva a szinusz, míg alulról a pótszögek koszinusz értékei olvashatók ki belőle.

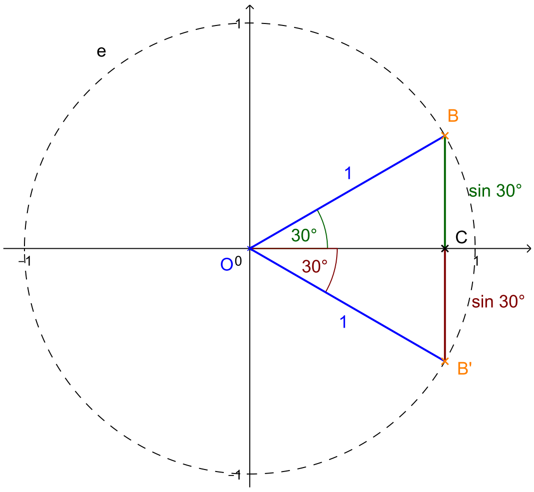
Még néhány fontosabb szög szögfüggvényértékét határozzuk meg. Először a tengelypontokban: 0° = 360°; 90°; 180°; 270°.

a szinusz – y koordináta; a koszinusz – x koordináta; a tangens – $\frac{\sin}{\cos}$; a kotangens – $\frac{\cos}{\sin}$



	0°	90°	180°	270°
sin x	0	1	0	–1
cos x	1	0	–1	0
tg x	0	–	0	–
cotg x	–	0	–	0

További hegyesszögek: 30°; 45° és 60°. Mivel a 30° és a 60° pótszögek, így felhasználjuk a már ismert összefüggéseket.
A 30°-os szög szinuszával kezdünk.



Ábránkon a BC távolság szinusz 30°. Ha tengelyesen tükrözzük a B pontot az x tengely szerint, megkapjuk a B′ pontot (szintén sin 30° távolságra a C ponttól). A B′BO háromszög egyenlő szárú, mivel az OB és az OB′ oldalai (szárak) egybevágóak – az egységkör sugara. A szárak által bezárt szög (BOB′∢) nagysága kétszer 30°, vagyis 60°. Az egyenlő szárú háromszögben az alapon nyugvó két szög egybevágó. A belső szögek összegéhez 180° – 60° = 120° hiányzik. Ezt kettővel osztva 60° esik az alapon nyugvó két szög mindegyikére. Tehát egyenlő szárú háromszögünk mindegyik belső szöge 60°-os ⇒ BB′O△ egyenlő oldalú. Ezért a |BB′| = 1. Ez a sin 30° nagyságának a kétszerese ⇒ sin 30° = 0,5. De ezt az értéket veszi fel a cos 60° is – egyszerre két oszlopba kaptunk eredményt (a pótszögek tulajdonságai).

A 30°-os szég koszinuszával folytatjuk. Itt a szinusz és a koszinusz közötti alapösszefüggést használjuk fel.

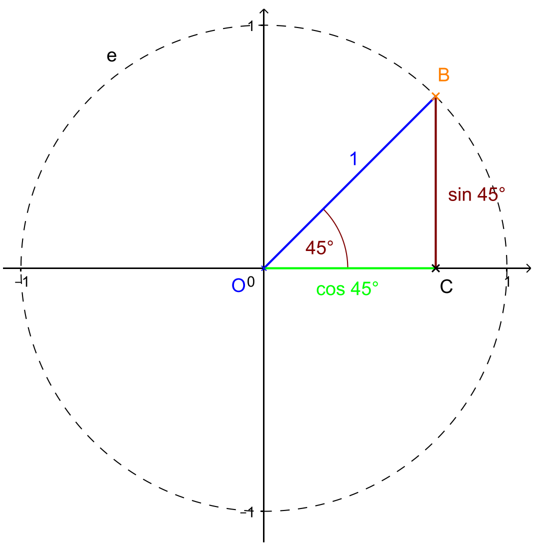
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30° = 1$$
$$\frac{1}{4} + \cos^2 30° = 1 \qquad /-\frac{1}{4}$$
$$\cos^2 30° = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\cos^2 30° = \frac{3}{4} \qquad /\sqrt{}$$
$$\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hasonlóképpen – a sin 60° is ennyi.
A tangenst és a kotangenst a szinusz és a koszinusz hányadosaként számoljuk:

$$\mathrm{tg}\ 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{cotg}\ 60°$$

$$\mathrm{cotg}\ 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} = \mathrm{tg}\ 60°$$

Még egy oszlopunk maradt üresen – a 45°-os szög szögfüggvényértékei



A BOC háromszög derékszögű, valamint egyik belső szöge 45°-os. Ezért az OBC∢ szintén 45°-os. Ha egy háromszög két belső szöge egybevágó, akkor az a háromszög egyenlő szárú. Konkrétan: az OC és a BC oldalak egybevágóak.

Ez azt jelenti, hogy a 45°-os szög szinusza és a koszinusza azonos érték. Újra az alapösszefüggésből indulunk ki:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$$

és mivel egyenlők, átmegy az alábbi alakba

$$2.\sin^2 45° = 1 \qquad /:2$$

$$\sin^2 45° = \frac{1}{2} \qquad /\sqrt{}$$

$$\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

A 45°-os szög tangense és kotangense két azonos szám hányadosa ⇒ eggyel egyenlők. Ezzel kitöltöttük táblázatunkat.

	30°	45°	60°
sin x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$