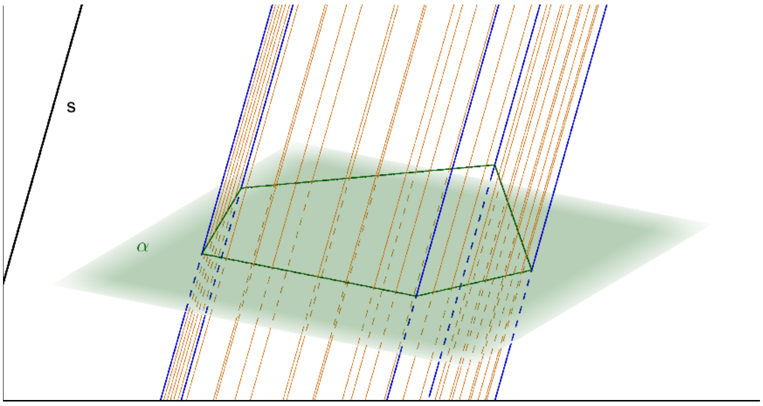
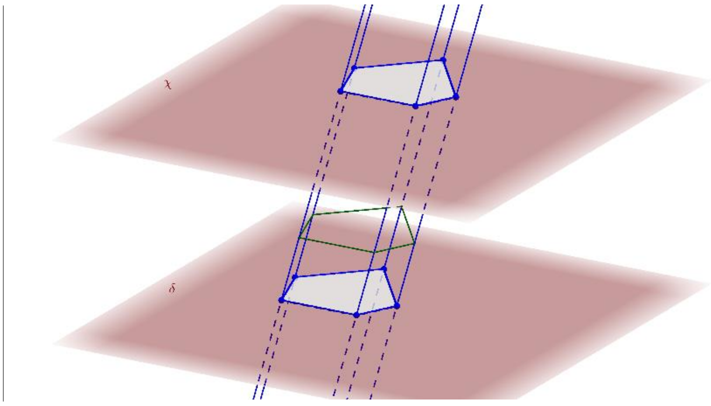
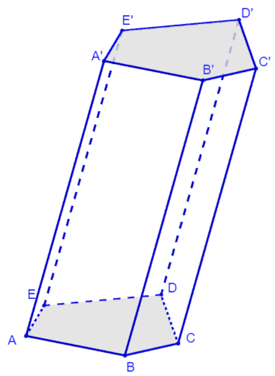
A hasáb felszíne és térfogata
(Povrch a objem hranola)

D. Adott egy sokszög (***vezéralakzat*** – riadiaci/určujúci útvar) és egy egyenes, mely nem párhuzamos a sokszög síkjával. Ha a sokszög határpontjain (oldalain) keresztül az adott egyenessel párhuzamos egyeneseket veszünk fel, egy végtelen hasábfelületet kapunk – végtelen hasáb. Ezek után két, a hasábfelületet metsző párhuzamos síkkal elmetszve megkapjuk a ***hasáb***ot (prizmát), mint a végtelen hasábfelület két sík közé eső részét (a hasábfelület és a réteg közös része).







alaplapok (podstavy) – két párhuzamos, egybevágó sokszög (egybevágó a vezéralakzattal is)

alaplap: ABCD

fedőlap: A'B'C'D'

testmagasság (výška telesa): v – az alaplapok távolsága

alapél (hrana podstavy) (az alaplap éle: AB, BC, …, C'D', D'A') – az alaplap oldala

oldalél (bočná hrana) (AA', BB', CC', DD') – az adott egyenessel párhuzamos, az alaplap és a fedőlap csúcsát összekötő szakasz

az oldalélek párhuzamosak és egybevágóak

a hasáb alkotói (strany hranola) – az alaplapok határpontjait összekötő, az adott egyenessel párhuzamos szakaszok az oldalélek kivételével

oldallap (bočná stena) (ABB'A', BCC'B', …) – határát két szomszédos oldalél és két alapél képezi

az oldallapok paralelogrammák

számuk megegyezik az alaplap csúcsainak (oldalainak) számával

a hasáb palástja (plášť hranola) – oldallapjainak összessége
lapátló (stenová uhlopriečka): u_s (AB', BA', BC', CB', …) – a hasáb lapjának átlója

alapátló

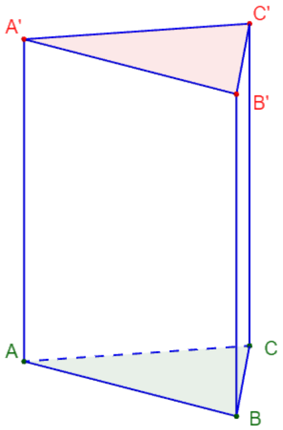
oldalátló

testátló (telesová uhlopriečka): u_t – az alap- és fedőlap csúcsát összekötő szakasz, amely nem fekszik az oldallapban

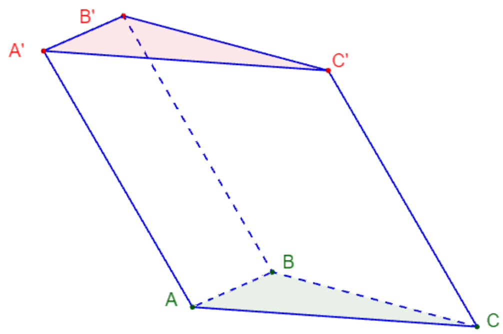
egyenes hasáb (kolmý hranol) – az oldalélek merőlegesek az alaplapokra

⇒ az oldallapok is merőlegesek az alaplapokra

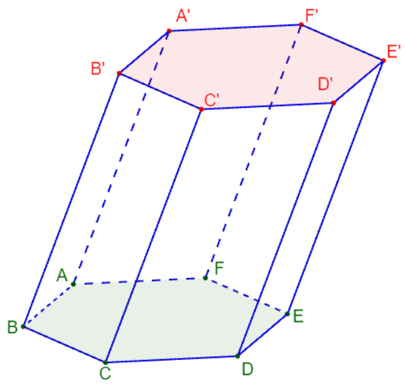
⇒ a testmagasság megegyezik az oldalélek hosszával



ferde hasáb (kosý/šikmý hranol) – ha nem egyenes hasáb (az oldalélek más szöget zárnak be az alaplapokkal, mint derékszög)

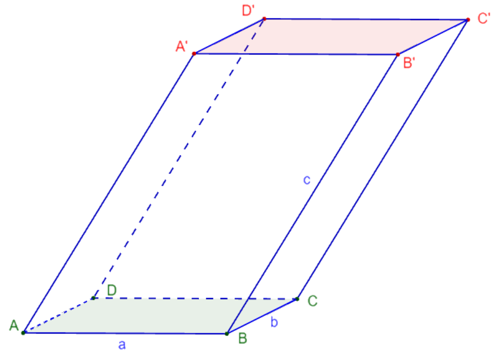


szabályos n oldalú hasáb (pravidelný n-boký hranol) – alaplapjai szabályos n-szögek



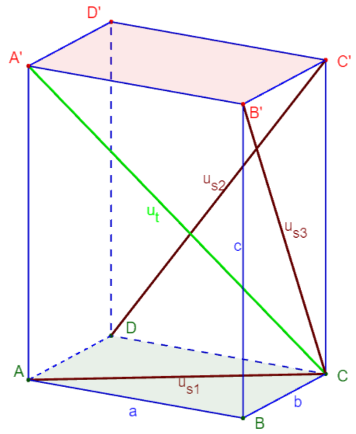
paralelepipedon (rovnobežnosten) – minden lapja paralelogramma

⇒ három pár egybevágó lapja van

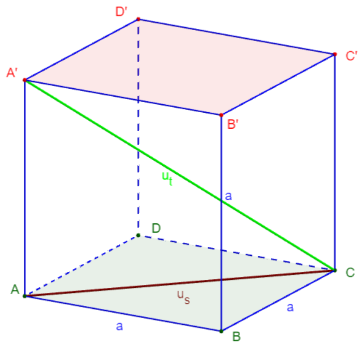


téglatest (kváder) – téglalap alapú egyenes hasáb

⇒ minden lapja téglalap



kocka/hexaéder (kocka) – négyzet alapú egyenes hasáb négyzet oldallapokkal – az öt szabályos (Platóni) test egyike



D. Egy test ***szabályos***, ha minden éle, minden élszöge és minden lapszöge egybevágó.
M. A szabálos testek minden lapja egybevágó.

prizma (prizma) – háromszög alapú egyenes hasáb

általános hasáb:

$S = 2S_p + S_{pl}$

$V = S_p.v$

téglatest:

$S = 2(ab + ac + bc)$

$V = abc$

$u_{s1} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $u_{s2} = \sqrt{a^2 + c^2}$ $u_{s3} = \sqrt{b^2 + c^2}$

$u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

kocka:

$S = 6a^2$

$V = a^3$

$u_s = \sqrt{2}a$ $u_t = \sqrt{3}a$

példa:

Számítsuk ki az $a = 40\ cm$ élhosszúságú fenyőfából készült kocka tömegét, ha sűrűsége $\rho = 550\ \frac{kg}{m^3}$!

$V = a^3 = 40^3 = 64\ 000\ cm^3$
$\rho = 550\ \frac{kg}{m^3} = 0,55\ \frac{g}{cm^3}$
$m = \rho.V = 0,55.64\ 000$
$m = 35\ 200\ g = 35,2\ kg$

A téglatest éleinek aránya 2 : 5 : 9. Számítsuk ki élei hosszát, ha ismert a felszíne: $S = 1\ 314$!

$a : b : c = 2 : 5 : 9$
$a = 2x$
$b = 5x$
$c = 9x$

$S = 2(ab + ac + bc) = 2(2x.5x + 2x.9x + 5x.9x) = 2(10x^2 + 18x^2 + 45x^2) = 146x^2$
$1\ 314 = 146x^2 \quad /:146$
$9 = x^2 \quad /\sqrt{\ }$
$3 = x$
$a = 6$
$b = 15$
$c = 27$

A szabályos háromoldalú hasáb alapélének hossza $a = 6$, palástjának a területe pedig $S_{pl} = 90$. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát!

$S_{pl} = 3a.v \quad \rightarrow \quad v = \frac{S_{pl}}{3a} = \frac{90}{3.6}$
$v = 5$

$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}.a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.6^2$
$S_p = 9.\sqrt{3} = 15,588$

$S = 2S_p + S_{pl} = 2.15,588 + 90$
$S = 121,177$

$V = S_p.v = 15,588.5$
$V = 77,942$

A szabályos ötoldalú hasáb alapéle $a = 11$, magassága $v = 24$. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát!

$\omega = \frac{360°}{5} = 72°$
$\text{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{a}{2\,\text{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{11}{2\,\text{tg}\,36°}$
$\rho = 7,570$

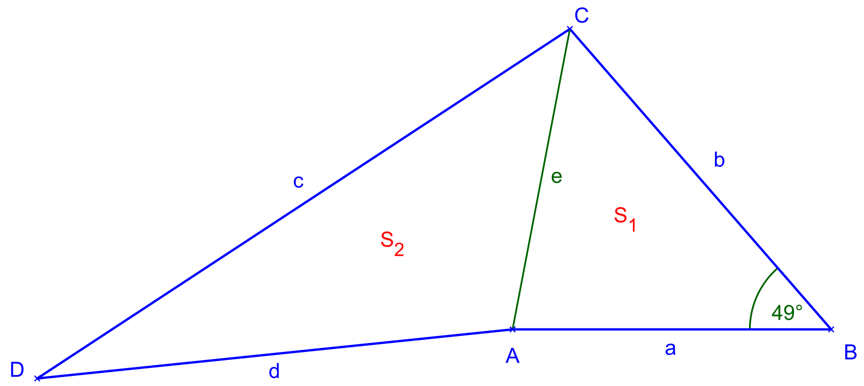
$S_p = 5.\frac{a.\rho}{2} = 5.\frac{11.7,570}{2}$
$S_p = 208,178$

$S_{pl} = 5.a.v = 5.11.24$
$S_{pl} = 1\ 320$

$S = 2S_p + S_{pl} = 2.208,178 + 1\ 320$
$S = 1\ 736,356$

$V = S_p.v = 208,178.24$
$V = 4\ 996,266$

Mekkora annak a négyszög alapú ferde hasábnak a térfogata, melynek alapélei $a = 4$, $b = 5$, $c = 8$, $d = 6$; a $h = 12$ hosszúságú oldaléle 62°-os szöget zár be az alaplappal; illetve az a és a b élek által bezárt szög 49°?



az alaplapot két háromszögre osztottuk: ABC△ és ACD△

az első (ABC△) tetületét két oldalából és a közrezárt szögből számoljuk

$S_1 = \frac{a.b.\sin 49°}{2} = \frac{4.5.\sin 49°}{2} = 7{,}547$

koszinusz tétellel megkapjuk az e átlóját, mint az ABC△ harmadik oldalát

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos 50{,}5° = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\cos 49° = 14{,}758$

$e = 3{,}842$

a másik (ACD△) területét három oldalából a Héron-képlettel kapjuk

$s = \frac{c+d+e}{2} = \frac{8+6+3{,}842}{2} = 8{,}921$

$S_2 = \sqrt{s(s-c)(s-d)(s-e)} = \sqrt{8{,}921(8{,}921-8)(8{,}921-6)(8{,}921-3{,}842)} = 11{,}039$

$S_p = S_1 + S_2 = 7{,}547 + 11{,}039 = 18{,}586$

az oldalél az alaplappal és a magassággal derékszögű háromszöget alkotnak → szögfüggvényt alkalmazunk

$\sin 62° = \frac{v}{h} \rightarrow v = h.\sin 62° = 12.\sin 62° = 10{,}595$

$V = S_p.v = 18{,}586.10{,}595$

$V = 196{,}926$