# A derivált és a monotonitás

(Derivácia a monotónnosť)

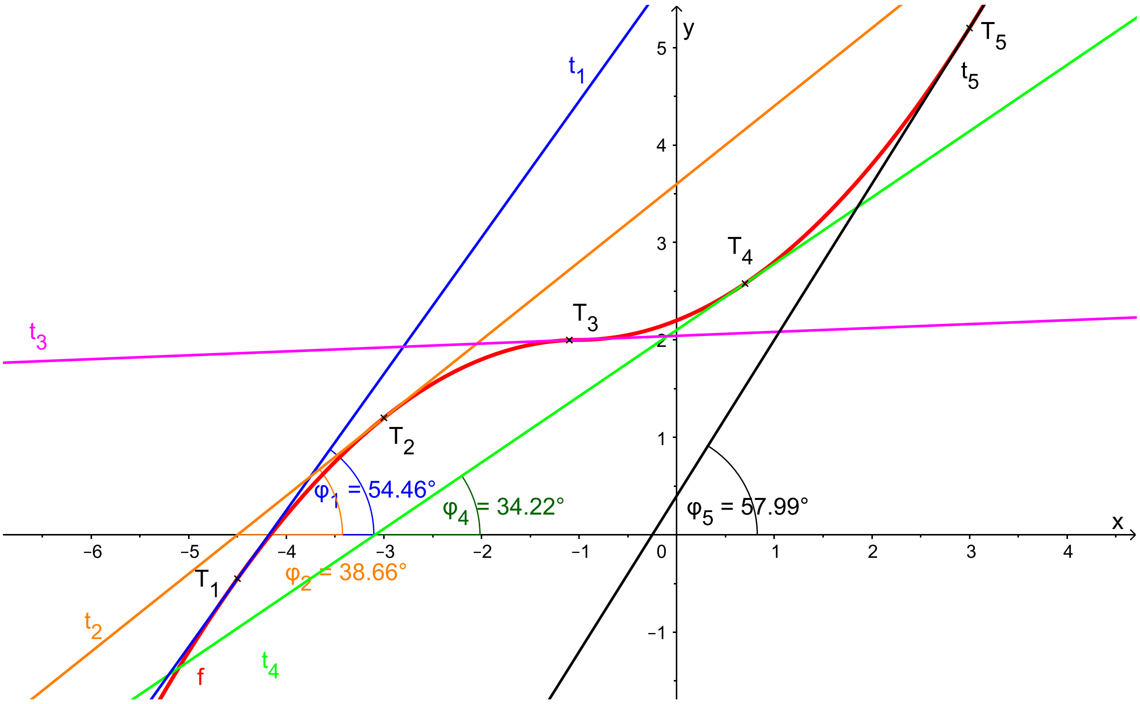
Keressünk összefüggést a derivált értéke és a függvény monotonitása között.

**D.** Az $f$ függvény az $I_1$ intervallumon ***monoton növekvő***, ha ezen intervallumon nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik.

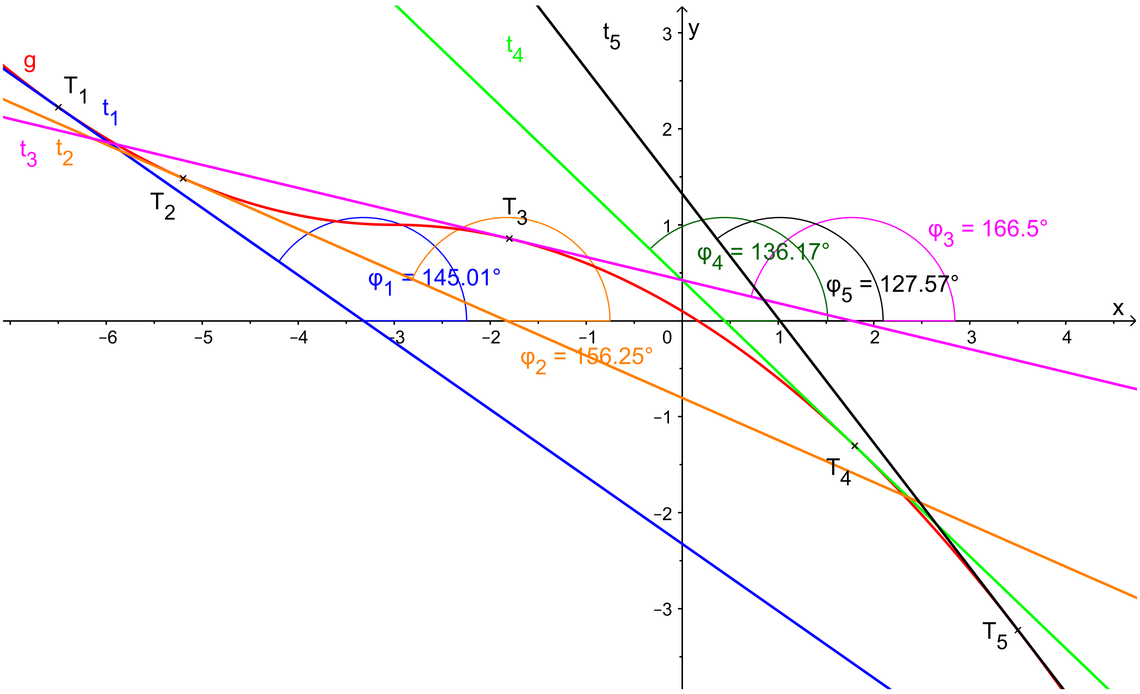
$$I_1 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I_1: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

**D.** Az $f$ függvény az $I_2$ intervallumon ***monoton csökkenő***, ha ezen intervallumon nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik.

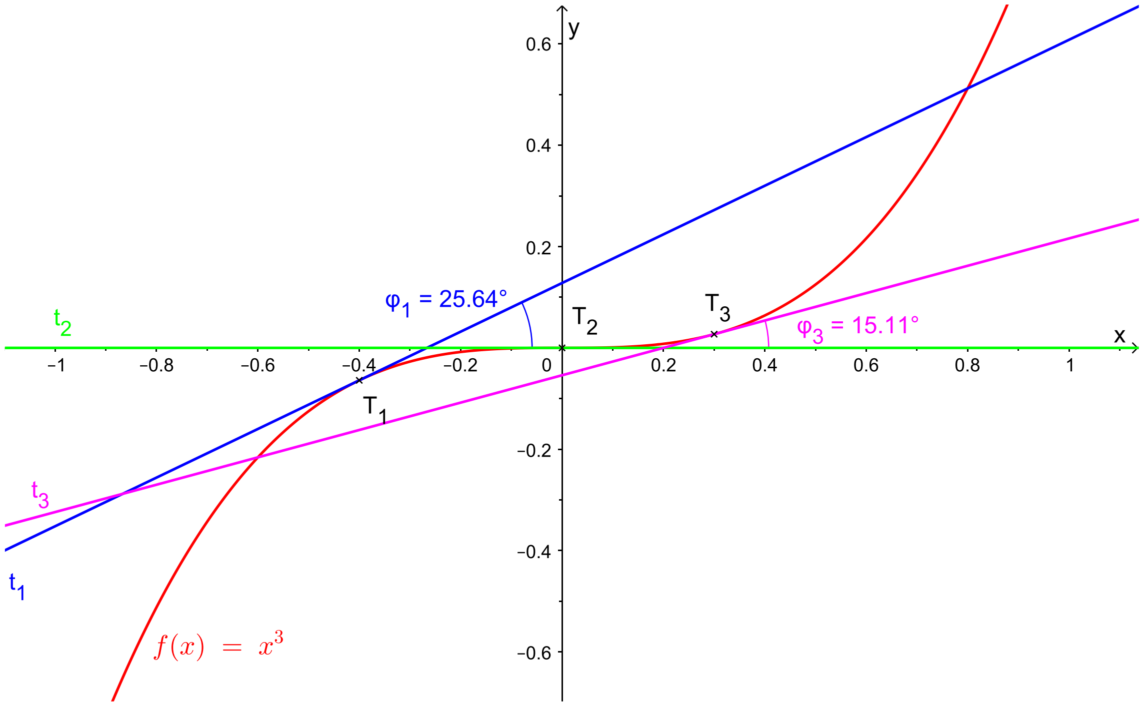
$$I_2 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_3, x_4 \in I_2: x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) > f(x_4)$$




Az első ábrán az $f$ függvény azon részét látjuk, ahol növekvő, illetve néhány pontjában az érintőit. Láthatjuk, hogy az érintők az $x$ tengellyel hegyesszöget zárnak be (irányszög). Az ilyen szögek tangens értéke (iránytényező) pozitív. Vagyis a deriváltfüggvény értékei az ilyen intervallumon pozitív.




A második ábrán a $g$ függvény azon részét látjuk, ahol csökkenő, illetve néhány pontjában az érintőit. Láthatjuk, hogy az érintők az $x$ tengellyel tompaszöget zárnak be (irányszög). Az ilyen szögek tangens értéke (iránytényező) negatív. Vagyis a deriváltfüggvény értékei az ilyen intervallumon negatív.




A harmadik példa az $f(x) = x^3$ függvény az origó környezetében. A $T_2(0; 0)$ pontjában az érintő vízszintes, vagyis az $x$ tengellyel bezárt szög egyenlő nullával. A derivált értéke, ezen szög tangense szintén nulla, annak ellenére, hogy a függvény az $x_2 = 0$ pontban növekvő

$\forall x_1: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ és szintén

$\forall x_3: x_2 < x_3 \Rightarrow f(x_2) < f(x_3)$.

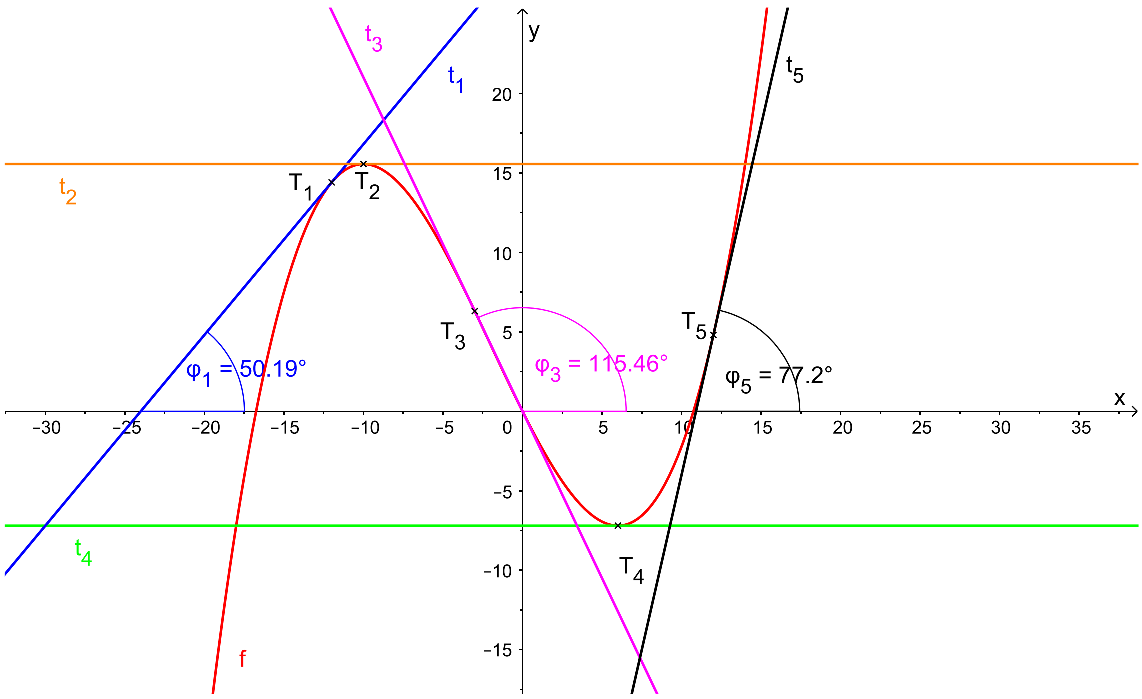
Mi következik ebből? Ahol a derivált értéke pozitív, akkor ott a függvény növekvő; ahol pedig a derivált negatív, ott csökkenő. Viszont ahol a függvény növekvő (vagy csökkenő), ott a derivált értéke nem feltétlenül pozitív (negatív) – felvehet nulla értéket is.

**T.** (szükséges de nem elégséges) Ha az $f$ függvény deriváltjának értékei valamely $I_1$ intervallumon pozitívak, akkor ezen intervallumon a függvény növekvő.

$\forall x \in I_1: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ m.↑. az $I_1$-en

**T.** (szükséges de nem elégséges) Ha az $f$ függvény deriváltjának értékei valamely $I_2$ intervallumon negatívak, akkor ezen intervallumon a függvény csökkenő.

$\forall x \in I_2: f'(x) < 0 \Rightarrow f$ m.↓. nz $I_2$-n




példa:

Keressük meg az intervallumokat, melyen a függvény növekvő illetve csökkenő:

a, $f(x) = x^2 + 6x – 7$ b, $g(x) = x^3 – 9x^2 + 2$ c, $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}$

először deriváljuk a függvényt

$f'(x) = (x^2 + 6x – 7)' = 2x + 6$

meghatározzuk az intervallumot(-okat), ahol a derivált pozitív értékeket vesz fel → egyenlőtlenséget oldunk

$2x + 6 > 0$ /-6

$2x > -6$ /:2

$x > -3$

$x \in (-3; \infty)$ m.↑.

és meghatározzuk az intervallumot(-okat), ahol a derivált negatív értékeket vesz fel → egyenlőtlenséget oldunk

$2x + 6 < 0$ /-6

$2x < -6$ /:2

$x < -3$

$x \in (-\infty; -3)$ m.↓.

---

$g'(x) = (x^3 – 9x^2 + 2)' = 3x^2 – 18x$

$3x^2 – 18x > 0$ /:3

$x^2 – 6x > 0$

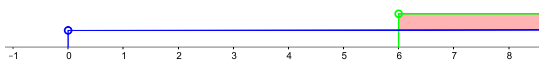
$x(x – 6) > 0$

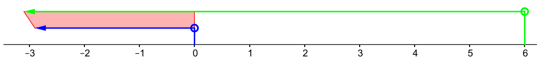
két tényező szorzata pozitív kell legyen ⇔ ha a tényezők előjele azonos

$(x > 0 \wedge x – 6 > 0)$ $\vee$ $(x < 0 \wedge x – 6 < 0)$

egyenlőtlenség-rendszert oldunk, és grafikusan határozzuk meg a metszetet → részleges megoldások

$x > 0 \wedge x > 6$ $x < 0 \wedge x < 6$





$x \in (6; \infty)$ $x \in (-\infty; 0)$

a teljes megoldást a két intervallum egyesítése adja

$x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$ m.↑.

$3x^2 – 18x < 0$ /:3

$x^2 – 6x < 0$

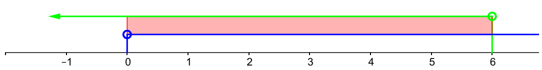
$x(x – 6) < 0$

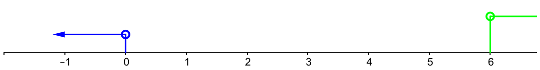
két tényező szorzata negatív kell legyen ⇔ ha a tényezők ellentett előjelűek

$(x > 0 \wedge x – 6 < 0)$ $\vee$ $(x < 0 \wedge x – 6 > 0)$

egyenlőtlenség-rendszert oldunk, és grafikusan határozzuk meg a metszetet → részleges megoldások

$x > 0 \wedge x < 6$ $x < 0 \wedge x > 6$





$x \in (0; 6)$ nincs metszet

$x \in (0; 6)$ m.↓.

---

$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}$

ez a függvény nem folytonos – az értelmezési tartományából hiányoznak pontok (a nevező nem lehet nulla)

$x \neq 0$

$x – 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}\right)' = (x^{-1} - 5(x-3)^{-1})' = -1.x^{-2} - 5.(-1).(x - 3)^{-2}.(x - 3)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-3)^2}.1 =$

$= -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-3)^2}$

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{-(x-3)^2 + 5.x^2}{x^2.(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{-(x^2-6x+9)+5x^2}{x^2(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{-x^2+6x-9+5x^2}{x^2.(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{4x^2+6x-9}{x^2.(x-3)^2} > 0$$

a hányados pozitívnak kell lennie

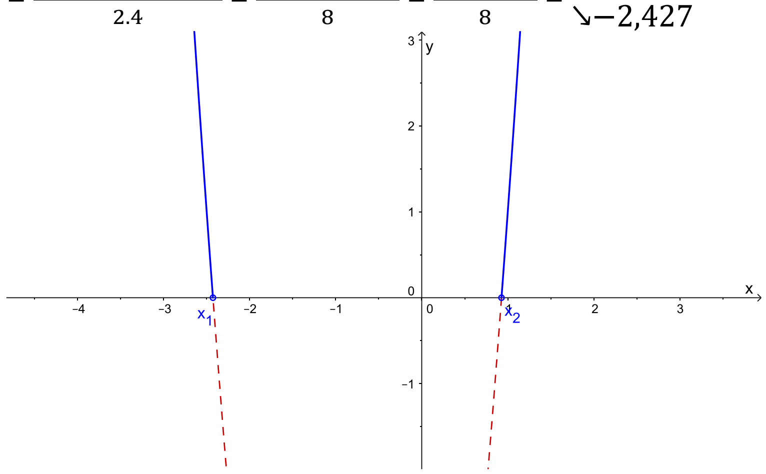
a nevező mindig pozitív (négyzetek szorzata), ezért elegendő a számlálót vizsgálni

$4x^2 + 6x - 9 > 0$

másodfokú egyenlőtlenséget oldunk

$4x^2 + 6x - 9 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.4.(-9)}}{2.4} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+144}}{8} = \frac{-6 \pm 13{,}42}{8} = \begin{matrix} \nearrow & 0{,}927 \\ \searrow & -2{,}427 \end{matrix}$$



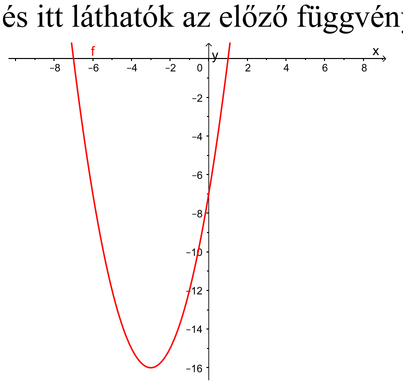

a megoldás a kisebb számtól (-2,427) balra elhelyezkedő számok és a nagyobbiktól (0,927) jobbra lévők – a *h* függvény ezen intervallumokon növekvő

mivel a függvény nem folytonos a {0; 3} pontokban, és ez tovább osztja a függvény monoton részeit – rendezzük ezeket az értékeket nagyság szerint: -2,427; 0; 0,927; 3

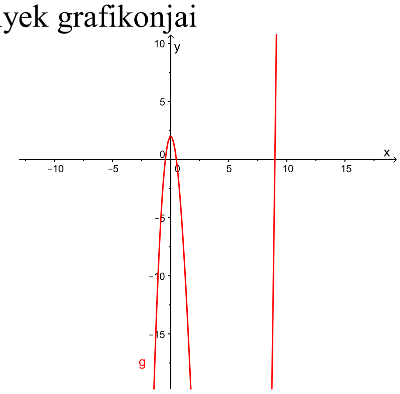
$x \in (-\infty; -2{,}427) \cup (0{,}927; 3) \cup (3; \infty)$ m.↑.

$x \in (-2{,}427; 0) \cup (0; 0{,}927)$ m.↓.

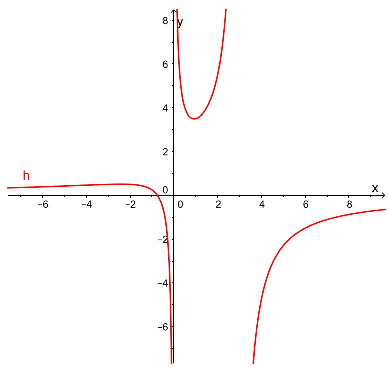
és itt láthatók az előző függvények grafikonjai




$f(x) = x^2 + 6x - 7$




$g(x) = x^3 - 9x^2 + 2$




$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}$