Függvényvizsgálat
(Priebeh funkcie)

A függvényvizsgálatnak az a célja, hogy bizonyos módszerekkel megállapítsuk a függvény összes tulajdonságát. Míg az első és második évfolyamban ehhez csak elementáris eszközökkel rendelkeztünk – függvényérték táblázat a választott x értékekre, az értelmezési tartomány meghatározása a feltételek megszabásának segítségével, a zérushelyek megkeresése egyenlet megoldásával – a deriválás segítségével néhány jellemzőt egyszerűbben, könnyebben és hamarabb meghatározhatunk. Néhány módszer megmarad (nem helyettesíthető más eljárással), és némelyeket lecserélhetünk a függvény deriválásával.
Ezen tulajdonságok meghatározásának sorrendje nincs szigorúan megkötve, némely lépéseket fel is cserélhetünk. Célunk, a függvény minél több jellemzőjének a meghatározása, hogy végül a függvény grafikonját minél pontosabban meg tudjuk rajzolni. Néhány tulajdonságot nem is ismerünk, mivel nem tartozik a középiskolai tananyagba – lehet, a főiskolán majd találkoztok velük.

Néhány függvény példáján keresztül megmutatjuk a függvényvizsgálatot.

példa:

Végezzünk függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken:

a, $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ b, $g(x) = (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$

c, $h(x) = \frac{x}{x^2-1} + x$ d, $i(x) = \frac{8x}{x^2+1}$

a, $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

folytonosság

a függvény folytonos – tetszőleges x értékre kiszámolható

értelmezési tartomány

$D_f = \mathbb{R}$

monotonitás

$f'(x) = (3x^4 + 4x^3)' = 12x^3 + 12x^2$

$$f'(x) > 0$$
$$12x^3 + 12x^2 > 0$$
$$12x^2(x + 1) > 0$$
$$x + 1 > 0$$
$$x > -1$$

$x \in (-1; \infty)$ m.↑.

$$f'(x) < 0$$
$$12x^2(x + 1) < 0$$
$$x < -1$$

$x \in (-\infty; -1)$ m.↓.

stacionárius helyek

$$f'(x) = 0$$
$$12x^3 + 12x^2 = 0$$
$$12x^2(x + 1) = 0$$

$x_1 = 0$; $x_2 = -1$

$f''(x) = (12x^3 + 12x^2)' = 36x^2 + 24x$

$f''(x_1) = f''(0) = 36.0^2 + 24.0 = 0$

$f''(x_2) = f''(-1) = 36.(-1)^2 + 24.(-1) = 36 - 24 = 12$

$12 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_2-ben szélsőértéke van

$12 > 0 \ \Rightarrow$ az $x_2 = -1$ pontban lokális minimuma van – globális is

$f(x_2) = f(-1) = 3.(-1)^4 + 4.(-1)^3 = 3 - 4 = -1$

$M_{in} = (-1; -1)$

$$f''(x) = 0$$

$36x^2 + 24x = 0$

$12x(3x + 2) = 0$

$x_3 = x_1 = 0; \quad x_4 = -\frac{2}{3}$

$f'''(x) = (36x^2 + 24x)' = 72x + 24$

$f'''(x_1) = f'''(0) = 72.0 + 24 = 24$

$24 \neq 0 \Rightarrow$ az $x_1 = 0$ pontban inflexiós pontja van

$f(x_1) = f(0) = 3.0^4 + 4.0^3 = 0$

$I_1 = (0; 0)$

$f'''(x_4) = f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 72.\left(-\frac{2}{3}\right) + 24 = -24$

$-24 \neq 0 \Rightarrow$ az $x_4 = -\frac{2}{3}$ pontban inflexiós pontja van

$f(x_4) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3.\left(-\frac{2}{3}\right)^4 + 4.\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{16}{27}$

$I_2 = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{16}{27}\right)$

zérushelyek

$X(x; 0) \in x$; $Y(0; y) \in y$

$f(x) = 0$

$3x^4 + 4x^3 = 0$

$x^3(3x + 4) = 0$

$x_5 = 0; \quad x_6 = -\frac{4}{3}$

$X_1(0; 0) = I_1$; $X_2\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$

$f(0) = 3.0^4 + 4.0^3 = 0$

$Y(0; 0) = I_2 = X_1$

páros – páratlan

$f(x) = 3x^4 + 4x^3$

$f(-x) = 3.(-x)^4 + 4(-x)^3 = 3x^4 - 4x^3 \neq \pm f(x)$

a függvény se nem páros se nem páratlan

határérték ±∞-ben

$\lim_{x\to\infty} (3x^4 + 4x^3) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} (3x^4 + 4x^3) = \infty$

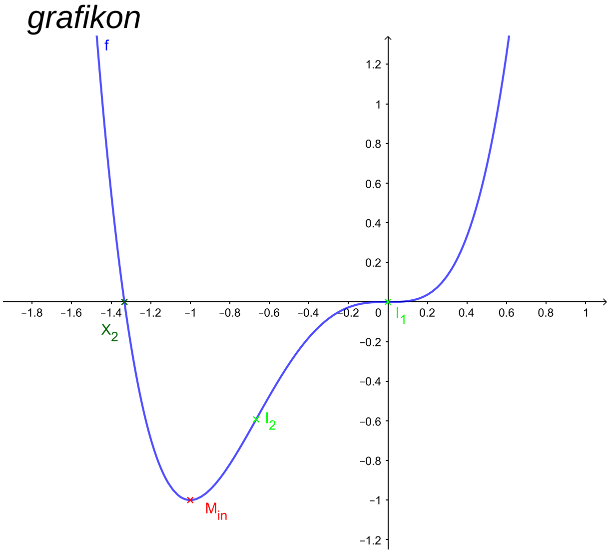
korlátosság

a függvény alulról korlátos

értékkészlet

$H_f = \langle -1; \infty)$

grafikon



b, $g(x) = (x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x - 2) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = x(x^4 - 5x^2 + 4) = x^5 - 5x^3 + 4x$

folytonosság

a függvény folytonos – tetszőleges x értékre kiszámolható

értelmezési tartomány

$D_g = \mathbb{R}$

monotonitás

$g'(x) = (x^5 - 5x^3 + 4x)' = 5x^4 - 15x^2 + 4$

$g'(x) > 0$

$5x^4 - 15x^2 + 4 > 0$

helyettesítés: $a = x^2$

$5a^2 - 15a + 4 > 0$

$5a^2 - 15a + 4 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4.5.4}}{2.5} = \frac{15\pm\sqrt{225-80}}{10} = \frac{15\pm12{,}04}{10} = \begin{matrix}\nearrow 2{,}704\\ \searrow 0{,}296\end{matrix}$

$2{,}704 = x^2$

$1{,}644 = |x|$

$x_1 = -1{,}644; \quad x_2 = 1{,}644$

$0{,}296 = x^2$

$0{,}544 = |x|$

$x_3 = -0{,}544; \quad x_4 = 0{,}544$

behelyettesítjük a pontokat az első deriváltba

intervallum	(-∞; -1,644)	(-1,644; -0,544)	(-0,544; 0,544)	(0,544; 1,644)	(1,644; ∞)
x	-2	-1	0	1	2
$5x^4 - 15x^2 + 4$	24	-6	4	-6	24
előjel	+	–	+	–	+

$x \in (-\infty; -1{,}644) \cup (-0{,}544; 0{,}544) \cup (1{,}644; \infty)$ m.↑.

$x \in (-1{,}644; -0{,}544) \cup (0{,}544; 1{,}644)$ m.↓.

stacionárius helyek

$g'(x) = 0$

$5x^4 - 15x^2 + 4 = 0$

$x_1 = -1{,}644; \quad x_2 = 1{,}644; \quad x_3 = -0{,}544; \quad x_4 = 0{,}544$

$g''(x) = (5x^4 - 15x^2 + 4)' = 20x^3 - 30x$

$g''(x_1) = g''(-1{,}644) = 20.(-1{,}644)^3 - 30.(-1{,}644) = -39{,}603$

$-39{,}603 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_1-ben szélsőértéke van

$-39{,}603 < 0 \ \Rightarrow$ az $x_1 = -1{,}644$ pontban lokális maximuma van

$g(x_1) = g(-1{,}644) = (-1{,}644)^5 - 5.(-1{,}644)^3 + 4.(-1{,}644) = 3{,}631$

$M_{ax1} = (-1{,}644; 3{,}621)$

$g''(x_2) = g''(1{,}644) = 20.1{,}644^3 - 30.1{,}644 = 39{,}603$

$39{,}603 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_2-ben szélsőértéke van

$39{,}603 > 0 \ \Rightarrow$ az $x_2 = 1{,}644$ pontban lokális minimuma van

$g(x_2) = g(1{,}644) = 1{,}644^5 - 5.1{,}644^3 + 4.1{,}644 = -3{,}631$

$M_{in2} = (1{,}644; -3{,}631)$

$g''(x_3) = g''(-0{,}544) = 20.(-0{,}544)^3 - 30.(-0{,}544) = 13{,}099$

$13{,}099 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_3-ban szélsőértéke van

$13{,}099 > 0 \ \Rightarrow$ az $x_3 = -0{,}544$ pontban lokális minimuma van

$g(x_3) = g(-0{,}544) = (-0{,}544)^5 - 5.(-0{,}544)^3 + 4.(-0{,}544) = -1{,}419$

$M_{in1} = (-0{,}544; -1{,}419)$

$g''(x_4) = g''(0{,}544) = 20.0{,}544^3 - 30.0{,}544 = -13{,}099$

$-13{,}099 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_4-ben szélsőértéke van

$-13{,}099 < 0 \ \Rightarrow$ az $x_4 = 0{,}544$ pontban lokális maximuma van

$g(x_4) = g(0{,}544) = 0{,}544^5 - 5.0{,}544^3 + 4.0{,}544 = 1{,}419$
$M_{ax2} = (0{,}544;\ 1{,}419)$

$$g''(x) = 0$$
$$20x^3 - 30x = 0$$
$$10x(2x^2 - 3) = 0$$
$$2x^2 - 3 = 0$$
$$2x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$|x| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$x_5 = 0; \quad x_6 = -\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad x_7 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$g'''(x) = (20x^3 - 30x)' = 60x^2 - 30$
$g'''(x_5) = g'''(0) = 60.0^2 - 30 = -30$
$-30 \neq 0 \ \Rightarrow$ az $x_5 = 0$ pontban inflexiós pontja van
$g(x_5) = g(0) = 0^5 - 5.0^3 + 4.0 = 0$
$I_1 = (0;\ 0)$

$$g'''(x_6) = g'''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 60.\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 30 = 60$$

$60 \neq 0 \ \Rightarrow$ az $x_6 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ pontban inflexiós pontja van

$$g(x_6) = g\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 - 5.\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 + 4.\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 1{,}531$$

$I_2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}};\ 1{,}531\right)$

$$g'''(x_7) = g'''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 60.\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 30 = 60$$

$60 \neq 0 \ \Rightarrow$ az $x_7 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ pontban inflexiós pontja van

$$g(x_7) = g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 - 5.\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 + 4.\sqrt{\frac{3}{2}} = -1{,}531$$

$I_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}};\ -1{,}531\right)$

zérushelyek

$X(x;\ 0) \in x$; $Y(0;\ y) \in y$

$$g(x) = 0$$
$$(x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$x_8 = -2; \quad x_9 = -1; \quad x_{10} = 0; \quad x_{11} = 1; \quad x_{12} = 2$
$X_1(-2;\ 0)$; $X_2(-1;\ 0)$; $X_3(0;\ 0) = I_1$; $X_4(1;\ 0)$; $X_5(2;\ 0)$
$f(0) = 0^5 - 5.0^3 + 4.0 = 0$
$Y(0;\ 0) = I_1 = X_3$

páros – páratlan

$g(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$
$g(-x) = (-x)^5 - 5(-x)^3 + 4(-x) = -x^5 + 5x^3 - 4x = -g(x)$
$g(-x) = -g(x) \ \Rightarrow$ a függvény páratlan – grafikonja középpontosan szimmetrikus az O szerint

határérték ±∞-ben

$$\lim_{x \to \infty} (x^5 - 5x^3 + 4x) = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 5x^3 + 4x) = -\infty$$

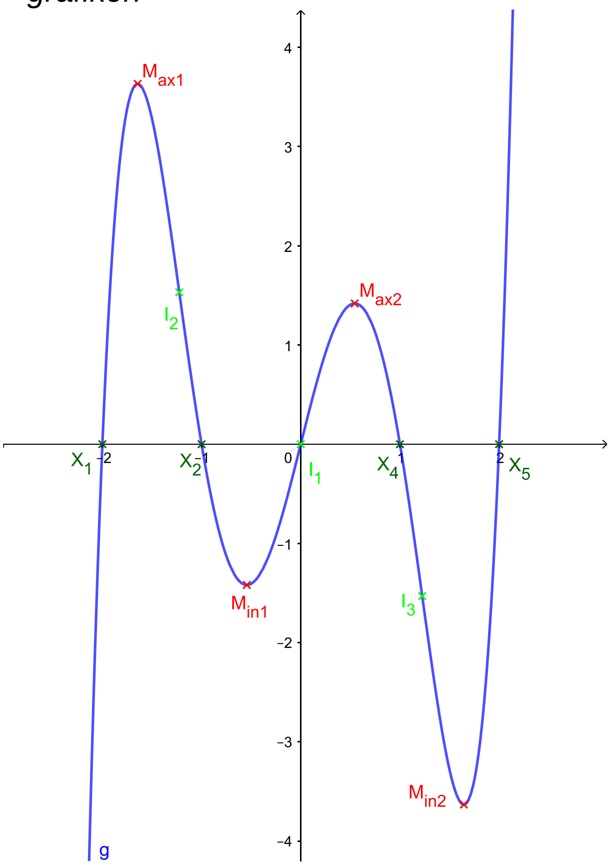
korlátosság

a függvény nem korlátos

értékkészlet

$H_g = \mathbb{R}$

grafikon



---

c, $h(x) = \frac{x}{x^2-1} + x = \frac{x+x(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x+x^3-x}{x^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1}$

folytonosság

$x^2 - 1 \neq 0$

$(x+1)(x-1) \neq 0$

a függvénynek szakadási helye van (nem folytonos) az $x_1 = -1$ és az $x_2 = 1$ pontokban

értelmezési tartomány

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

monotonitás

$$h'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1} + x\right)' = \frac{x'.(x^2-1)-x.(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} + 1 = \frac{1.(x^2-1)-x.2x}{(x^2-1)^2} + 1 = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} + 1 = \frac{-x^2-1+x^4-2x^2+1}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^3)'.(x^2-1)-x^3.(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2.(x^2-1)-x^3.2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$h'(x) > 0$

$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} > 0$

$x^4 - 3x^2 > 0$

$x^2(x^2-3) > 0$

$x^2 - 3 > 0$

$x^2 > 3$

$|x| > \sqrt{3}$

$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ m.↑.

$h'(x) < 0$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} < 0$$

$$|x| < \sqrt{3}$$

$x \in \left(-\sqrt{3}; -1\right) \cup (-1; 1) \cup \left(1; \sqrt{3}\right)$ m.↓.

stacionárius helyek

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0$$

$x_3 = 0$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$|x| = \sqrt{3}$$

$x_4 = -\sqrt{3}; \quad x_5 = \sqrt{3}$

$$h''(x) = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(x^4-3x^2)'.(x^2-1)^2-(x^4-3x^2).\left((x^2-1)^2\right)'}{((x^2-1)^2)^2} = \frac{(4x^3-6x).(x^2-1)^2-(x^4-3x^2).2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)[(4x^3-6x)(x^2-1)-4x(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$h''(x_3) = h''(0) = \frac{2.0(0^2+3)}{(0^2-1)^3} = 0$$

$$h''(x_4) = h''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2.(-\sqrt{3})\left((-\sqrt{3})^2+3\right)}{\left((-\sqrt{3})^2-1\right)^3} = \frac{-2\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$-\frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0 \;\wedge\;$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_4-ben szélsőértéke van

$-\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \;\Rightarrow\;$ az $x_4 = -\sqrt{3}$ pontban lokális maximuma van

$$h(x_4) = h\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$M_{ax} = \left(-\sqrt{3};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$h''(x_5) = h''\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2.\sqrt{3}\left(\sqrt{3}^2+3\right)}{\left(\sqrt{3}^2-1\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0 \;\wedge\;$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_5-ben szélsőértéke van

$\frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \;\Rightarrow\;$ az $x_5 = \sqrt{3}$ pontban lokális minimuma van

$$h(x_5) = h\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}^3}{\sqrt{3}^2-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$M_{in} = \left(\sqrt{3};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$h''(x) = 0$$

$$\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$$

$$x = 0$$

$x_3 = 0$

$$h'''(x) = \left(\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\right)' = \left(\frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4}\right)' = \ldots = -\frac{6x^4+36x^2+6}{(x^2-1)^4}$$

$$h'''(x_3) = h'''(0) = -\frac{6.0^4+36.0^2+6}{(0^2-1)^4} = \frac{6}{1} = 6$$

$6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ az $x_3 = 0$ pontban inflexiós pontja van

$$h(x_3) = h(0) = \frac{0^3}{0^2-1} = 0$$

$I = (0; 0)$

zérushelyek

X(x; 0) ∈ x; Y(0; y) ∈ y

$$h(\mathrm{x}) = 0$$
$$\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^2-1} = 0$$
$$\mathrm{x} = 0$$

$x_6 = 0$

XY(0; 0) = I

páros – páratlan

$h(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^2-1}$

$h(\mathrm{-x}) = \frac{(-\mathrm{x})^3}{(-\mathrm{x})^2-1} = \frac{-\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^2-1} = -h(\mathrm{x})$

$h(\mathrm{-x}) = -h(\mathrm{x}) \Rightarrow$ a függvény páratlan – grafikonja középpontosan szimmetrikus az O szerint

határérték ±∞-ben

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^2-1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^2-1} = -\infty$

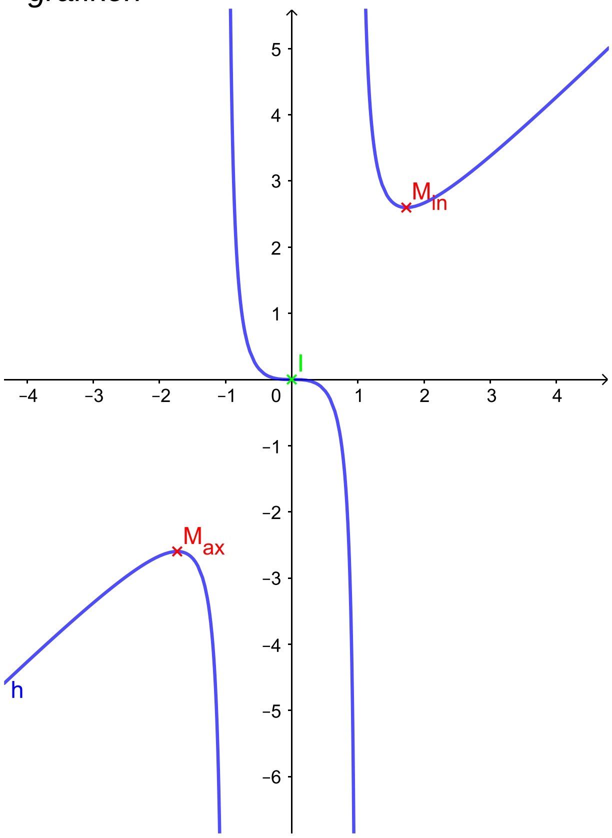
korlátosság

a függvény nem korlátos

értékkészlet

$H_h = \mathbb{R}$

grafikon



---

d, $i(\mathrm{x}) = \frac{8\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1}$

folytonosság

$\mathrm{x}^2 + 1 \neq 0 \quad \to \quad \nexists \mathrm{x}$

a függvény folytonos – tetszőleges x értékre kiszámolható

értelmezési tartomány

$D_g = \mathbb{R}$

monotonitás

$i'(x) = \left(\frac{8x}{x^2+1}\right)' = \frac{(8x)'.(x^2+1)-8x.(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{8.(x^2+1)-8x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x^2+8-16x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2}$

$$i'(x) > 0$$
$$\frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2} > 0$$
$$8 - 8x^2 > 0$$
$$8 > 8x^2$$
$$1 > x^2$$
$$1 > |x|$$

$x \in (-1; 1)$ m.↑.

$$i'(x) < 0$$
$$\frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2} < 0$$
$$1 < |x|$$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ m.↓.

stacionárius helyek

$$i'(x) = 0$$
$$\frac{8-8x^2}{(x^2-1)^2} = 0$$
$$8 - 8x^2 = 0$$
$$1 - x^2 = 0$$
$$1 = x^2$$
$$1 = |x|$$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 1$

$i''(x) = \left(\frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(8-8x^2)'.(x^2+1)^2-(8-8x^2).\left((x^2+1)^2\right)'}{((x^2+1)^2)^2} = \frac{-16x.(x^2+1)^2-(8-8x^2).2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4} =$

$= \frac{(x^2+1)[-16x(x^2+1)-4x(8-8x^2)]}{(x^2+1)^4} = \frac{-16x^3-16x-32x+32x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3} = \frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

$i''(x_1) = i''(-1) = \frac{16(-1)((-1)^2-3)}{((-1)^2+1)^3} = \frac{-16.(-2)}{8} = 4$

$4 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_1-ben szélsőértéke van

$4 > 0 \ \Rightarrow$ az $x_1 = -1$ pontban lokális minimuma van – globális is

$i(x_1) = i(-1) = \frac{8(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-8}{2} = -4$

$M_{in} = (-1; -4)$

$i''(x_2) = i''(1) = \frac{16.1(1^2-3)}{(1^2+1)^3} = \frac{16.(-2)}{8} = -4$

$-4 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivált $\Rightarrow$ az x_2-ben szélsőértéke van

$-4 < 0 \ \Rightarrow$ az $x_2 = 1$ pontban lokális maximuma van – globális is

$i(x_2) = i(1) = \frac{8.1}{1^2+1} = \frac{8}{2} = 4$

$M_{ax} = (1; 4)$

$$i''(x) = 0$$
$$\frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$
$$16x(x^2 - 3) = 0$$
$$x^2 - 3 = 0$$
$$x^2 = 3$$
$$|x| = \sqrt{3}$$

$x_3 = 0; \quad x_4 = -\sqrt{3}; \quad x_5 = \sqrt{3}$

$i'''(x) = \left(\frac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3}\right)' = \ldots = \frac{-48x^4+288x^2-48}{(x^2+1)^4}$

$i'''(x_3) = i'''(0) = \frac{-48.0^4+288.0^2-48}{(0^2+1)^4} = \frac{-48}{1} = -48$

$-48 \neq 0 \ \Rightarrow$ az $x_3 = 0$ pontban inflexiós pontja van

$i(x_3) = i(0) = \frac{8.0}{0^2+1} = 0$

$I_1 = (0; 0)$

$i'''(x_4) = i'''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-48.\left(-\sqrt{3}\right)^4+288.\left(-\sqrt{3}\right)^2-48}{\left(\left(-\sqrt{3}\right)^2+1\right)^4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$1{,}5 \neq 0 \;\Rightarrow$ az $x_4 = -\sqrt{3}$ pontban inflexiós pontja van

$i(x_4) = i\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{8.\left(-\sqrt{3}\right)}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1} = -2\sqrt{3}$

$I_2 = \left(-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right)$

$i'''(x_5) = i'''\left(\sqrt{3}\right) = \frac{-48.\sqrt{3}^4+288.\sqrt{3}^2-48}{\left(\sqrt{3}^2+1\right)^4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$1{,}5 \neq 0 \;\Rightarrow$ az $x_5 = \sqrt{3}$ pontban inflexiós pontja van

$i(x_5) = i\left(\sqrt{3}\right) = \frac{8.\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+1} = 2\sqrt{3}$

$I_3 = \left(\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$

zérushelyek

$X(x; 0) \in x$; $Y(0; y) \in y$

$$i(x) = 0$$
$$\frac{8x}{x^2+1} = 0$$
$$x = 0$$

$x_6 = 0$

$XY(0; 0) = I_1$

páros – páratlan

$i(x) = \frac{8x}{x^2+1}$

$i(-x) = \frac{8.(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-8x}{x^2-1} = -i(x)$

$i(-x) = -i(x) \;\Rightarrow$ a függvény páratlan – grafikonja középpontosan szimmetrikus az O szerint

határérték ±∞-ben

$\lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2+1} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x^2+1} = 0$

korlátosság

a függvény alulról is és felülről is korlátos

értékkészlet

$H_i = \langle -4; 4 \rangle$

grafikon