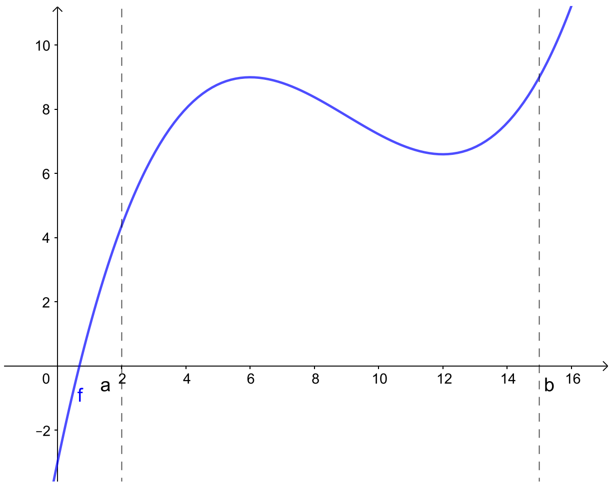
A határozott integrál
(Určitý integrál)

Vegyünk egy függvényt:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}^3}{45} - \frac{3}{5}\mathrm{x}^2 + \frac{24}{5}\mathrm{x} - 3$$

Próbáljuk meg kiszámítani az f függvény görbéje, az x tengely, az y tengellyel párhuzamos, az x tengely a = 2 és b = 15 értékein áthaladó egyenesek által határolt felület területét.



Ennek érdekében osszuk fel az ⟨a; b⟩ intervallumot tíz egyenlő részre – az egyes intervallumok hossza $\frac{15-2}{10} =$ 1,3-ra jön ki:

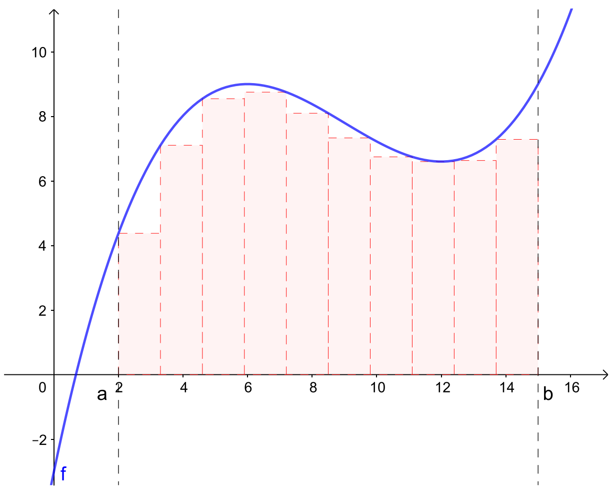
I_1: ⟨2; 3,3⟩; I_2: ⟨3,3; 4,6⟩; I_3: ⟨4,6; 5,9⟩; … ; I_9: ⟨12,4; 13,7⟩; I_{10}: ⟨13,7; 15⟩

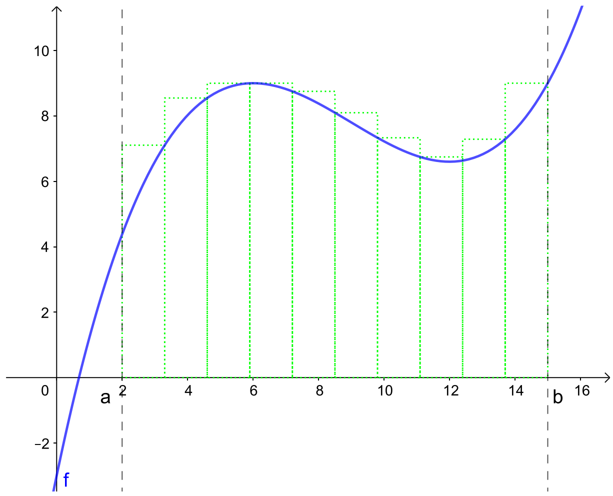
Ezen intervallumokba három módon rajzolunk téglalapokat:

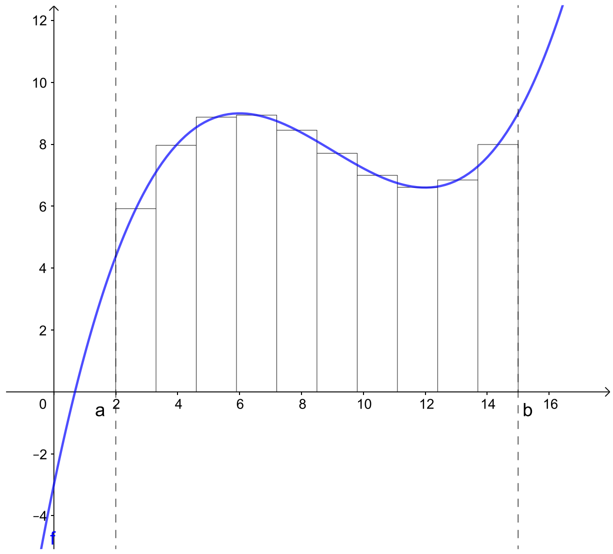
1, hogy a függvénynek pontosan egy közös pontja legyen a téglalappal (hogy egy csúcsával érintse a görbét alulról) – az mondhatjuk, hogy a téglalapok beírtak

2, hogy az aktuális intervallumon a görbe teljes egészében a téglalap belsejében legyen (hogy egy csúcsával érintse a görbét felülről) – az mondhatjuk, hogy a téglalapok körülírtak

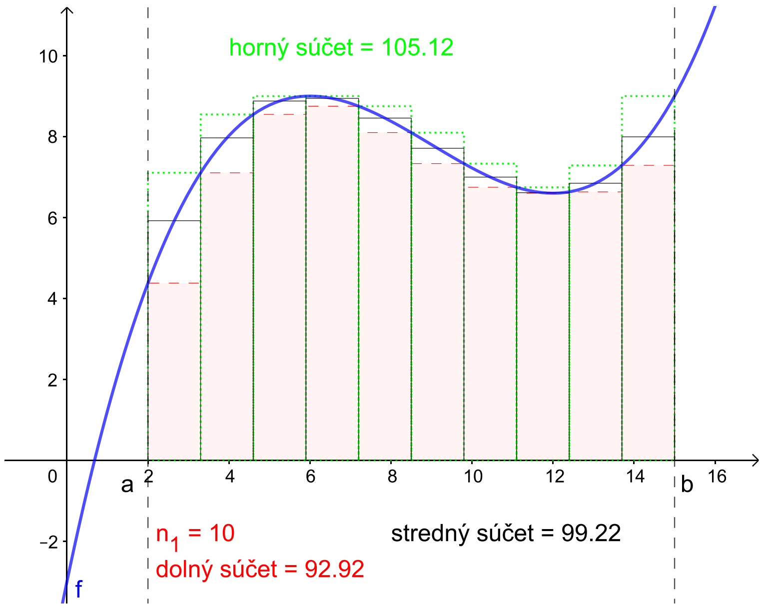
3, hogy a téglalap negyedik oldalának felezőpontja a görbén legyen







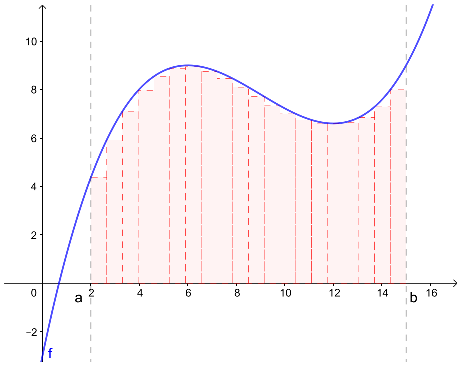
Az ábrákból láthatjuk, hogy a téglalapok területeinek összege a három esetben különbözőek lesznek. Nincs szükségünk extra logikára, hogy belássuk azt, hogy az első esetben kapjuk a legkisebb összeget – ***alsó Darboux integrálközelítő összeg*** (dolný integrálny súčet), vagy csak ***alsó összeg***. A második esetben jön ki a legnagyobb összeg – ***felső Darboux integrálközelítő összeg*** (horný integrálny súčet), vagy csak ***felső összeg***. A harmadik összeg pedig a két előző érték között lesz.

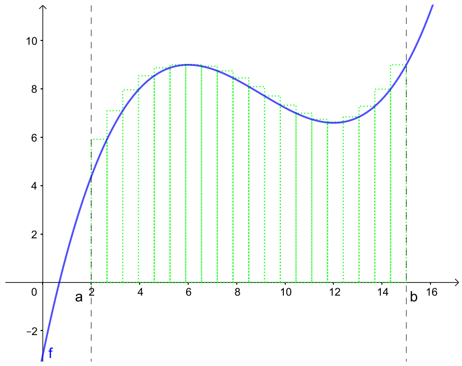


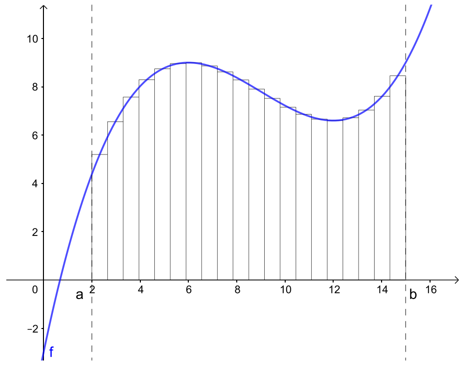
Változtassuk meg a beosztást, duplázzuk meg az intervallumok számát ⇒ az intervallumok hossza feleakkora lesz: $\frac{15-2}{20} = 0{,}65$:

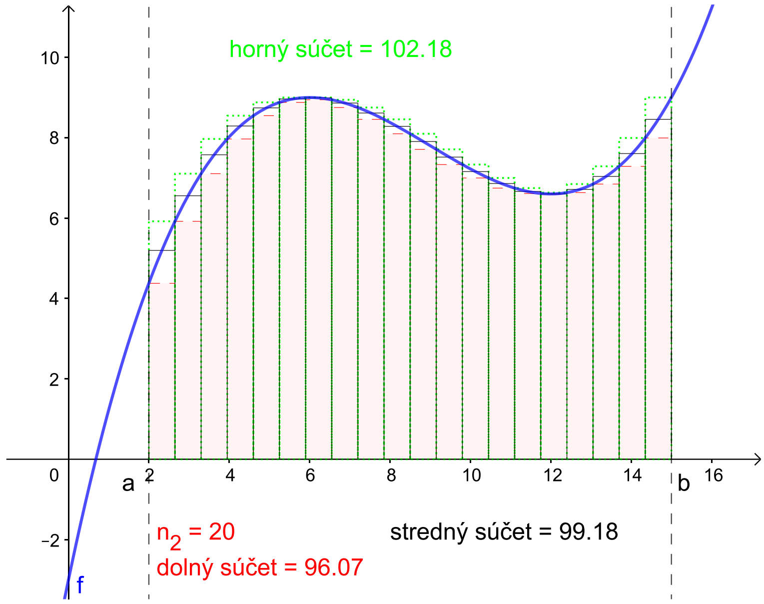
I_1: ⟨2; 2,65⟩; I_2: ⟨2,65; 3,3⟩; I_3: ⟨3,3; 3,95⟩; … ; I_{19}: ⟨13,7; 14,35⟩; I_{20}: ⟨14,35; 15⟩

Újból az előző három módon rajzolunk bele téglalapokat. Utána pedig a területek összegét számítjuk ki.



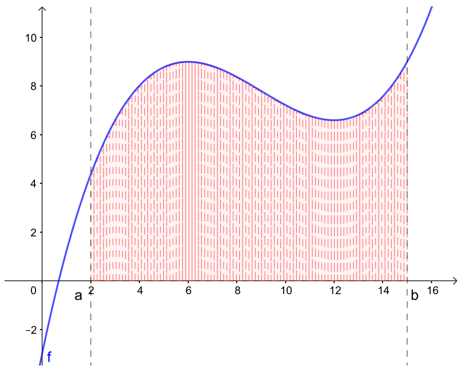


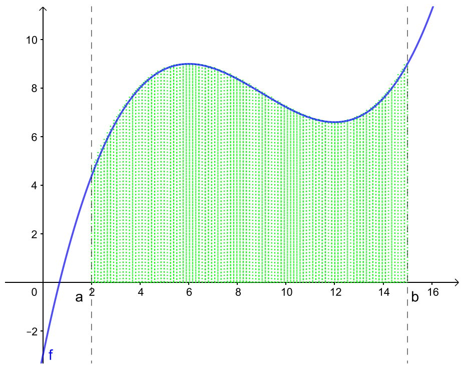


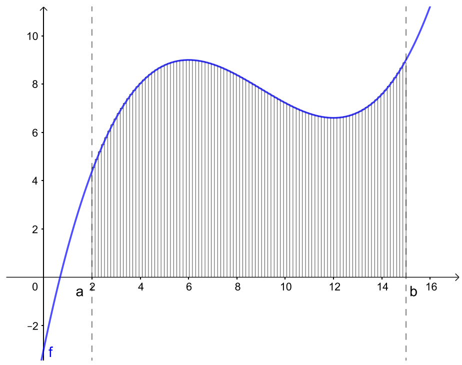


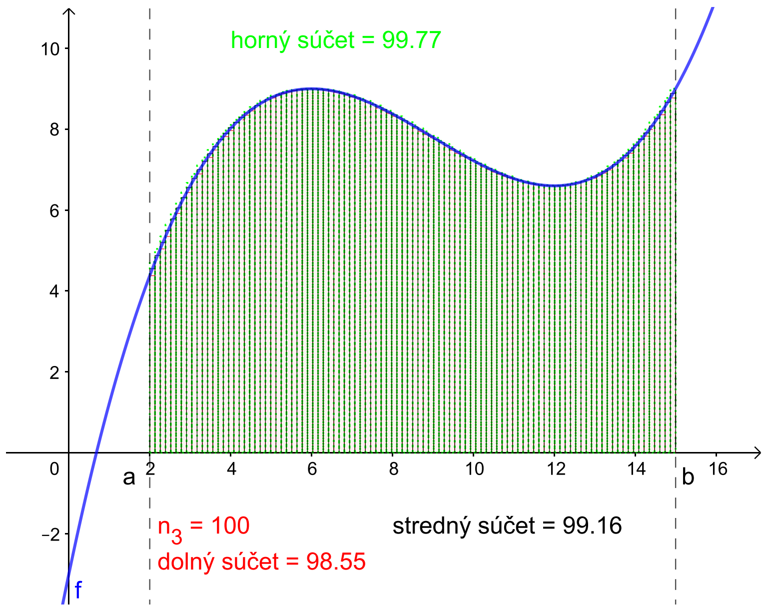
Harmadszor pedig 100 azonos részre osztjuk az intervallumot – az intervallumok hossza: $\frac{15-2}{100} = 0{,}13$:

I_1: $\langle 2; 2{,}13\rangle$; I_2: $\langle 2{,}13; 2{,}26\rangle$; I_3: $\langle 2{,}26; 2{,}39\rangle$; … ; I_{99}: $\langle 14{,}74; 14{,}87\rangle$; I_{100}: $\langle 14{,}87; 15\rangle$









Most hasonlítsuk össze az alsó és a felső összegek közötti különbségeket:

az intervallumok száma	*alsó össze*	*felső összeg*	*különbség*
10	92,92	105,12	12,20
20	96,07	102,18	6,11
100	98,55	99,77	1,22

Minél finomabb beosztást (több az intervallum) használunk, annál közelebb kerül a két érték egymáshoz – különbségük közelít a nullához. Ha vesszük az összegek határértékét, ahol az $n \to \infty$, akkor az f függvény határozott integrálját kapjuk az ⟨a; b⟩ intervallumon.

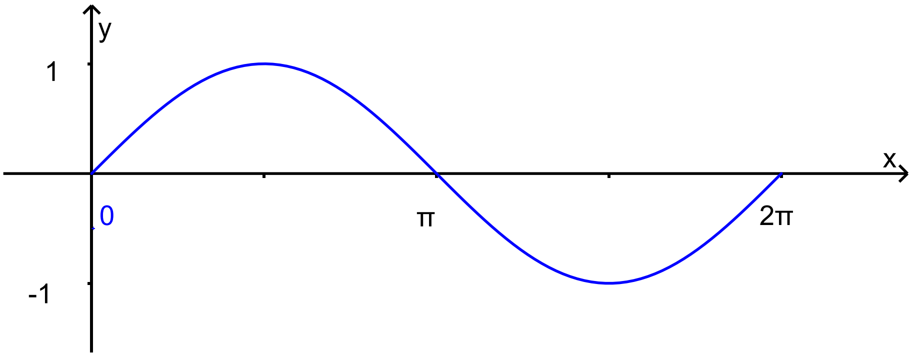
D. ***Az f függvény határozott integrálja az ⟨a; b⟩ intervallumon*** a függvénygörbe alatti felület területét jelenti.

$$\int_a^b f(x)dx$$

M. A határt alkotják: a függvény grafikonja; az x tengely és az $x = a$ illetve az $x = b$ egyenletű egyenesek.

M. A „függvény alatti“ felület területe negatív szám lesz, ha a függvény grafikonja az x tengely alatt helyezkedik el.

Ezért a sin x függvény határozott integrálja a ⟨0; 2π⟩ intervallumon egyenlő nullával. Ezen intervallumon a szinuszgörbe ugyanakkora része van az x tengely alatt, mint felett.



Természetesen, ha így kellene számolnunk a határozott integrálokat, nehezen kapnánk pontos értékeket. Szerencsére van egy jó segítségünk.

T. *Newton–Leibniz*-tétel

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

ahol az F(x) jelöli az f függvény határozatlan integrálját (primitív függvényét).

Meg kell határoznunk ezen függvény határozatlan integrálját, és ebbe behelyettesíteni az intervallum felső és alsó határát. Majd ezek különbsége adja a keresett területet.

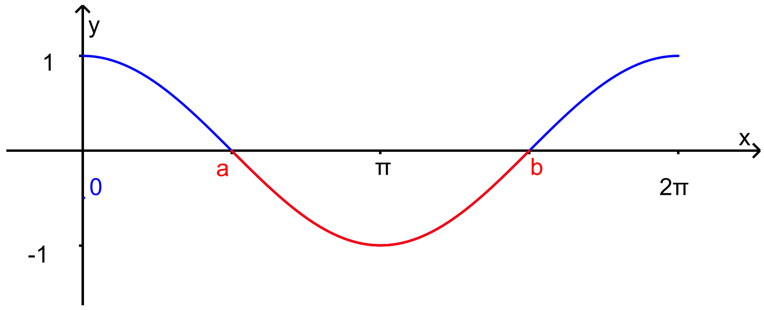
Számítsuk ki a bevezető példánkat!

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_2^{15} \frac{x^3}{45} - \frac{3}{5}x^2 + \frac{24}{5}x - 3\,dx = \left[\frac{x^4}{180} - \frac{1}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - 3x\right]_2^{15} =$$

$$= \left(\frac{15^4}{180} - \frac{1}{5}15^3 + \frac{12}{5}15^2 - 3.15\right) - \left(\frac{2^4}{180} - \frac{1}{5}2^3 + \frac{12}{5}2^2 - 3.2\right) = \frac{405}{4} - \frac{94}{45} = \frac{17849}{180} = 99{,}161\,1$$

Számítsuk ki a cos x függvény határozott integrálját a $\left\langle\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ intervallumon.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\; dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2$$

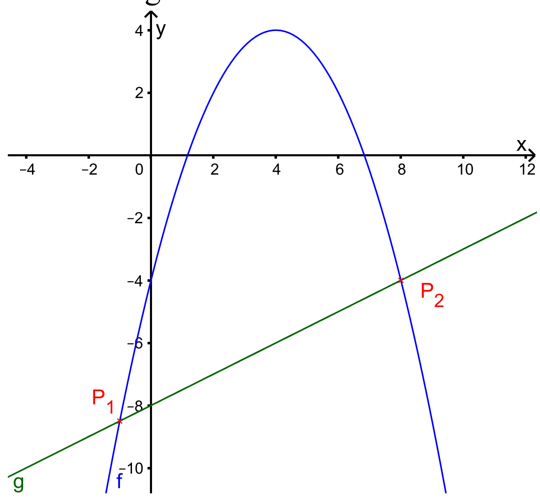


A felület területe azért jön ki negatív számra, mert a görbe az a és b értékek között a tengely alatt helyezkedik el (lásd az ábrát).

Határozott integrállal nem csak a függvény és az x tengely által határolt felület területét tudjuk meghatározni az $\langle a; b\rangle$ értékek között. Ugyancsak meghatározható két függvény grafikonja közé eső rész területe is. A „felső” függvényből kell kivonni az „alsó” függvényt – ekkor a különbség határozott integrálja adja a keresett területet.

Adottak az *f* és a *g* függvények: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$; $g(x) = \frac{x}{2} - 8$. Határozzuk meg a függvények grafikonjai közé eső felület területét!

először a grafikonok metszéspontjait kell meghatározni – ezek lesznek a határozott integrál határai ezért egyenletrendszert oldunk meg



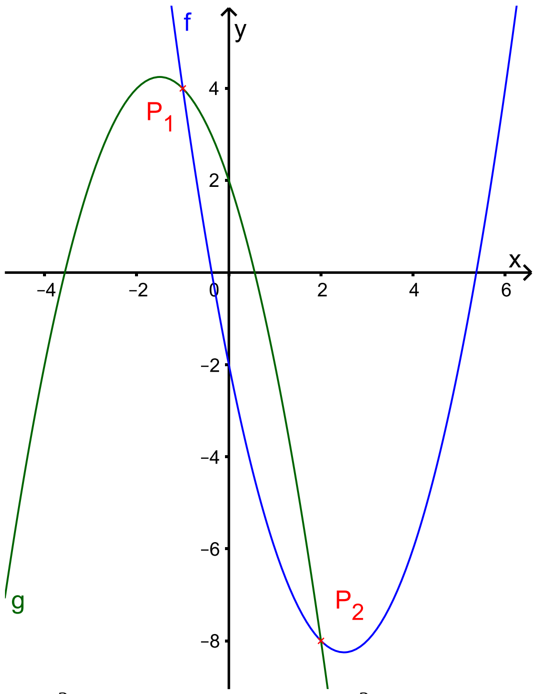
$$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4 = \frac{x}{2} - 8 \qquad /.2$$
$$-x^2 + 8x - 8 = x - 16 \qquad /-x + 16$$
$$-x^2 + 7x + 8 = 0 \qquad /.(-1)$$
$$x^2 - 7x - 8 = 0$$
$$(x + 1).(x - 8) = 0$$

$x_1 = -1 = a$; $x_2 = 8 = b$ (nem szükséges a metszéspontok második, y koordinátáit meghatározni)

az ábrából egyértelműen látszik, hogy a -1 és a 8 pontok között az *f* függvény a *g* felett van

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_{-1}^{8} -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4 - \left(\frac{x}{2} - 8\right) dx = \int_{-1}^{8} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7x}{2} + 4\, dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}.\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{8} = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{7x^2}{4} + 4x\right]_{-1}^{8} =$$
$$= -\frac{8^3}{6} + \frac{7.8^2}{4} + 4.8 - \left(-\frac{(-1)^3}{6} + \frac{7.(-1)^2}{4} + 4(-1)\right) = \frac{176}{3} - \left(-\frac{25}{12}\right) = \frac{243}{4}$$

Adottak az *f* és a *g* függvények: $f(x) = x^2 - 5x - 2$; $g(x) = -x^2 - 3x + 2$. Határozzuk meg a függvények grafikonjai közé eső felület területét!



$x^2 - 5x - 2 = -x^2 - 3x + 2 \quad /+ x^2 + 3x - 2$

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad /:2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$x_1 = -1 = a;\ x_2 = 2 = b$

$$\int_a^b g(x) - f(x)dx = \int_{-1}^{2} -x^2 - 3x + 2 - (x^2 - 5x - 2)dx = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\,dx =$$

$$= \left[-2.\frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= -\frac{2.2^3}{3} + 2^2 + 4.2 - \left(-\frac{2.(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4.(-1)\right) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9$$

A határozott integrál alkalmazásai

1, a görbe ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

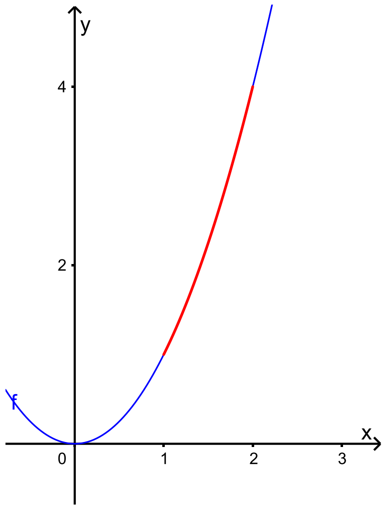
2, a forgástest térfogata:

$$V = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$$

3, a forgástest felszíne:

$$S = 2\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Számítsuk ki az *f*(x) = x^2 egyenletű parabola görbéjének az 1 és a 2 értékek közé eső részének az hosszát!



$f'(x) = (x^2)' = 2x$

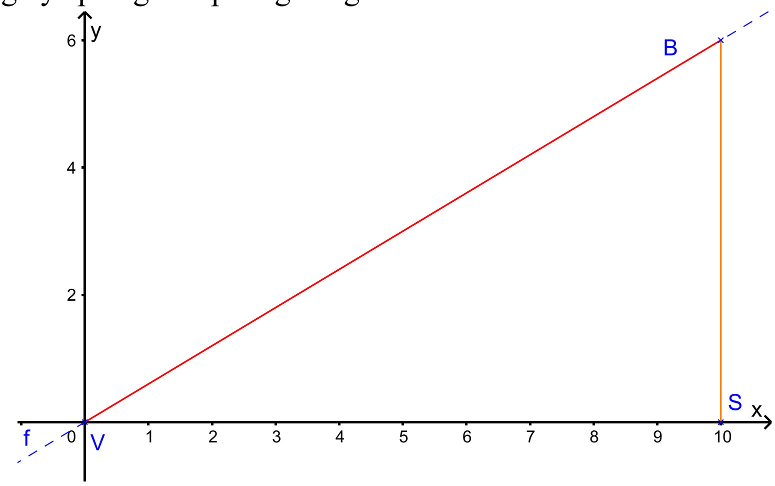
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx =$$

$$= \left[\frac{\ln\left|\sqrt{1 + 4x^2} + 2x\right|}{4} + \frac{x\sqrt{1 + 4x^2}}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln\left|\sqrt{1 + 4.2^2} + 2.2\right|}{4} + \frac{2\sqrt{1 + 4.2^2}}{2} -$$

$$-\left(\frac{\ln\left|\sqrt{1+4.1^2}+2.1\right|}{4} + \frac{1\sqrt{1+4.1^2}}{2}\right) = \frac{\ln\left|\sqrt{17}+4\right|}{4} + \frac{2\sqrt{17}}{2} - \frac{\ln\left|\sqrt{5}+2\right|}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 3{,}167\,8$$

Számítsuk ki a forgáskúp térfogatát, ha sugara r = 6, magassága pedig v = 10!

ez a kúp egy olyan derékszögű háromszög megforgatásával keletkezett, ahol a két befogó az r és a v, a forgatás tengelye pedig a kúp magassága



az egyenes iránytényezője: $k_f = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

a függvény előírása: $f(x) = \frac{3}{5}x + b$, és mivel az egyenes (a függvény grafikonja az origón halad keresztül, ezért a b = 0

$f(x) = \frac{3}{5}x$

$$V = \pi.\int_a^b f^2(x)dx = \pi.\int_0^{10} \left(\frac{3}{5}x\right)^2 dx = \pi.\int_0^{10} \frac{9}{25}x^2dx = \pi.\left[\frac{9}{25}.\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \pi.\left[\frac{3x^3}{25}\right]_0^{10} =$$

$$= \pi.\left(\frac{3.10^3}{25} - \frac{3.0^3}{25}\right) = \pi.\left(\frac{3000}{25} - \frac{0}{25}\right) = 120\pi = 376{,}99$$

ha képlettel számoltunk volna: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi 6^2.10 = 120\pi \rightarrow$ azonos eredményt kaptunk

Akár általánosíthatjuk is ezt a térfogatot.

az egyenes iránytényezője: $k_f = \frac{r}{v}$

$f(x) = \frac{r}{v}.x$

$$V = \pi . \int_a^b f^2(x)dx = \pi . \int_0^v \left(\frac{r}{v}.x\right)^2 dx = \pi . \int_0^v \frac{r^2}{v^2}.x^2 dx = \pi . \left[\frac{r^2}{v^2}.\frac{x^3}{3}\right]_0^v =$$

$$= \pi . \left(\frac{r^2}{v^2}.\frac{v^3}{3} - \frac{r^2}{v^2}.\frac{0^3}{3}\right) = \pi . \left(\frac{r^2 v}{3} - \frac{0}{3}\right) = \pi . \frac{r^2 v}{3}$$

Számítsuk ki az előző forgáskúp palástjának felszínét ($r = 6$; $v = 10$)!

$f(x) = \frac{3}{5}x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5}$

$$S = 2\pi . \int_a^b f(x).\sqrt{1 + (f'^{(x)})^2}dx = 2\pi . \int_0^{10} \frac{3}{5}x.\sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} dx = 2\pi . \int_0^{10} \frac{3}{5}x.\frac{\sqrt{34}}{5} dx =$$

$$= 2\pi . \int_0^{10} \frac{3\sqrt{34}}{25} x\, dx = 2\pi . \left[\frac{3\sqrt{34}}{25}.\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 2\pi . \left[\frac{3\sqrt{34}.x^2}{50}\right]_0^{10} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3\sqrt{34}.10^2}{50} - \frac{3\sqrt{34}.0^2}{50}\right) = 2\pi\left(\frac{300\sqrt{34}}{50} - \frac{0}{50}\right) = 12\sqrt{34}.\pi = 219{,}82$$

a klasszikus módon számított felszín: $S_{pl} = \pi rs = \pi 6\sqrt{6^2 + 10^2} = 6\sqrt{136}.\pi = 12\sqrt{34}.\pi$

Általánosítva:

$f(x) = \frac{r}{v}.x \rightarrow f'(x) = \frac{r}{v}$; $s = \sqrt{r^2 + v^2}$

$$S = 2\pi . \int_a^b f(x).\sqrt{1 + (f'^{(x)})^2}dx = 2\pi . \int_0^v \frac{r}{v}x.\sqrt{1 + \left(\frac{r}{v}\right)^2} dx = 2\pi . \int_0^v \frac{r\sqrt{v^2 + r^2}}{v^2} x\, dx =$$

$$= 2\pi . \left[\frac{r.s}{v^2}.\frac{x^2}{2}\right]_0^v = 2\pi . \left(\frac{r.s}{v^2}.\frac{v^2}{2} - \frac{r.s}{v^2}.\frac{0^2}{2}\right) = 2\pi . \left(\frac{r.s}{2} - \frac{0}{2}\right) = 2\pi\frac{r.s}{2} = \pi rs$$