Das Mathematik MSA script

Daniel Roth und Louis Wulfmeyer

March 21, 2024

Mathematics is beautiful, Philosophy is ugly

1 Lineare Funktionen

Definition. *Eine lineare Funktion besitzt die Normalform $y = mx + t$. Der dazugehörige Graph ist eine Gerade. m ist die Steigung und t der y-Achsenabschnitt der Geraden. (Formelsammlung Seite 12)*

Verständnis. *Der y-Wert setzt sich aus dem Grundwert t (der sich bei $x = 0$ ergibt) und m mal dem x-Wert zusammen. m gibt an um wieviele Einheiten die Gerade ansteigt, wenn x um eins erhöht wird.*

Beispiel. *Ein typisches Beispiel für eine Funktion ist eine Preisfunktion. Man zahlt für eine Waffel einen Grundpreis t = 4€ und für jedes Topping 50 ct = $\frac{1}{2}$ €. Dann lautet die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x + 4$.*

Aufgabe 1. *Wie bestimme ich bei einer linearen Funktion $y = \frac{1}{2}x + 4$ zu einem x - Wert x=3 den entsprechnenden y -Wert?*

Ich setzte den x-wert 3 für x ein und rechne den y-Wert aus:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3 + 4 = 1,5 + 4 = 6,5$$

Aufgabe 2. *Wie bestimme ich den Schnittpunkt einer linearen Funktion $y = \frac{1}{2}x + 4$ mit der x-Achse? (Formelsammlung S.14.)*

Man setzt für y Null ein und bekommt eine Gleichung

$$0 = \frac{1}{2}x + 4$$

Diese löst man mittels Äquivalenzumformung nach x auf.

$$0 = \frac{1}{2}x + 4 \qquad | - 4 \tag{1}$$

$$-4 = \frac{1}{2}x \qquad | : \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$-8 = x \tag{3}$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist dann $N(-8 \mid 0)$ Den x-Wert nennt man auch Nullstelle.

Verständnis. *Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat den y-Wert (Höhe) null. Man sucht also den x-Wert, bei dem der y-Wert null ist.*

Aufgabe 3. *Wie bestimme ich die Gleichung einer linearen Funktion aus einem vorgegebenen Punkt $P(2 \mid -3)$ und einer Steigung m =-0,5? (Formelsammlung S.13, oben)*

Man schreibt sich die Normalform der Gerade y = mx + t auf und setzt den x-Wert von P, den y-Wert von P und m in diese Funktionsgleichung ein. Mit Äquivalenzumformung löst man nach t auf.

$$-3 = -0,5 \cdot 2 + t \tag{4}$$
$$-3 = -1 + t \qquad | + 1 \tag{5}$$
$$-2 = t \tag{6}$$

Am Ende wird die Funktionsgleichung notiert, wobei x und y wieder "freigelassen" werden.

$$Antwort : y = -0,5x - 2$$

Verständnis. *Man denkt sich den Punkt P als "Startpunkt", von dem man aus die Steigung nach vorne und zurück gehen kann. Wenn man bei der y-Achse ankommt ergibt sich der t-Wert.*

Aufgabe 4. *Wie bestimme ich die Gleichung einer linearen Funktion aus zwei vorgegebenen Punkten $P(2 \mid -3)$ und $Q(5 \mid -1)$? (Formelsammlung S.13, mitte)*

Wir nehmen P als der "ersten" Punkt und Q als den "zweiten" und schreiben:

$$P(\underbrace{2}_{x_1} \mid \underbrace{-3}_{y_1}) \ und \ Q(\underbrace{5}_{x_2} \mid \underbrace{-1}_{y_2})$$

Für die Steigung m zwischen den beiden Punkten gilt die Formel (auswendig lernen):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

. In diese setzen wir ein:

$$m = \frac{-1 - (-3)}{5 - 2} = \frac{2}{3}$$

Jetzt setzen wir dieses m und den x-Wert und y-Wert von P in die Normalform der Gerade y =mx+t ein und lösen nach t auf:

$$-3 = \frac{2}{3} \cdot 2 + t \tag{7}$$
$$-3 = \frac{4}{3} + t \qquad | - \frac{4}{3} \tag{8}$$
$$-4\frac{1}{3} = t \tag{9}$$

Antwort: $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

Verständnis. *Der Zähler in der Formel ist die Differenz der y-Werte, das ist der "Höhenunterschied", der Nenner ist die Differenz der x-Werte, das ist der "Längenunterschied". Der Quotient, Höhenunterschied pro Längenunterschied ist die Steigung.Je mehr Höhe pro Länge eine Gerade steigt desto steiler ist sie. (siehe die Skizze in der Formelsammlung). Sind beide gleich so ist die Steigung 1, das ergibt eine Diagonale im Quadrat. Im Strassenbau wird diese 1 als 100% gesetzt und eine Steigung von m = 0,2 wird als 20% bezeichnet.*

Aufgabe 5. *Wie bestimme ich den Schnittpunkt zweier linearer Funktionen* $y = -\frac{2}{3}x + 1$ *und* $y = \frac{1}{4}x - 4,5$ *?*

Man stzt die beiden Funktionsterme (rechts von dem y) gleich und löst die Gleichung mit Äquivalenzumformung. Dazu bring man die Terme mit x nach links und die Terme ohne x nach rechts:

$$-\frac{2}{3}x + 1 = \frac{1}{4}x - 4,5 \qquad | - \frac{1}{4}x \quad | - 1 \tag{10}$$
$$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = -4,5 - 1 \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

Die linke Seite berchnet man indem man die beiden Zahlen vor dem x mit dem Taschenrechner verrechnet: $-\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{11}{12}$

$$-\frac{11}{12}x = -5,5 \qquad | : (-\frac{11}{12}) \tag{13}$$
$$x = 6 \tag{14}$$

Den x-Wert setzt man dann in die erste Funktionsgleichung ein und erhält so den y-Wert:

$$y = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 1 = -3$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist dann $S(6 \mid -3)$

Aufgabe 6. *Wie prüfe ich ob ein Punkt* $C(-2 \mid -3)$ *auf einer Geraden mit der Funktionsgleichung* $y = -\frac{2}{3}x + 1$ *liegt?*

Man setzt den x-Wert und den y-Wert von C für x und y ein und rechnet die rechte Seite aus:

$$-3 = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + 1 \tag{15}$$

$$-3 = \frac{4}{3} + 1 \tag{16}$$

$$-3 = 2\frac{1}{3} \tag{17}$$

Da die letzte Aussage falsch ist liegt C nicht auf der Geraden.

Aufgabe 7. *Wie wandle ich eine Geradengleichung in allgemeiner Form -2x + 7y = 9 in die Normalform y = mx + t um?*

Man löst die Gleichung mit Äquivalenzumformung nach y auf:

$$-2x + 7y = 9 \qquad | + 2x \tag{18}$$

$$7y = 2x + 9 \qquad | : 7 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

Wen man die Summe rechts durch 7 teilt, darf man beide Summanden einzeln duch 7 teilen. Damit entstehen in der Regel zwei Brüche

$$y = \frac{2}{7}x + \frac{9}{7} \tag{21}$$

Es ergibt sich also $m = \frac{2}{7}$ und $t = \frac{9}{7}$

Aufgabe 8. *Wie bestimme ich die Geradengleichung einer Gerade, die parallel auf eine andere Gerade mit Gleichung $y = -\frac{3}{4}x - 2$ steht und durch einen vorgegeben Punkt $C(-2 \mid 3)$ verläuft?*

Da die gesuchte Gerade parallel zu den gegebenen ist, hat sie die gleiche Steigung $m = -\frac{3}{4}$. Nun stezt man m, den x-wert und den y-Wert von C in die Normalform y=mx+t ein und löst nach t auf:

$$3 = -2 \cdot (-\frac{3}{4}) + t \tag{22}$$

$$3 = 1,5 + t \qquad | - 1,5 \tag{23}$$

$$1,5 = t \tag{24}$$

Antwort: Die Funktionsgleichung lautet $y = -\frac{3}{4}x + 1,5$.

Aufgabe 9. *Wie bestimme ich die Geradengleichung einer Gerade, die senkrecht auf eine andere Gerade mit Gleichung $y = -\frac{3}{4}x - 2$ steht und durch einen vorgegeben Punkt $C(-2 \mid 3)$ verläuft?*

Die senkrechte Steigung m_n zu einer vorgegebenen Steigung m erhält man duch die Formel (Formelsammlung S. 14, dort steht orthogonal statt senkrecht)

$$m_n = -\frac{1}{m}$$

Damit ergibt sich

$$m_n = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Die senkrechte Steigung und den Punkt C geben wir in die Normalenform y = mx + t ein lösen nach t auf.

$$3 = -2 \cdot (\frac{4}{3}) + t \tag{25}$$

$$3 = -\frac{8}{3} + t \qquad | + \frac{8}{3} \tag{26}$$

$$5\frac{2}{3} = t \tag{27}$$

Antwort: Die Funktionsgleichung lautet $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{2}{3}$.

Verständnis. *Eine Senkrechte Steigung bedeutet, dass man beim Steigungsdreieck die Höhe und die Länge taiuscht sowie aus fallen steigen wird und umgekehrt. Die senkrechte Steigung ist also der negative Kehrwert der Ausgangssteigung. So wird aus einer Steigung von* $\frac{3}{5}$ *eine senkrechte von* $-\frac{5}{3}$.

Aufgabe 10. *a) Gib die Funktionsgleichung einer Gerade an, die Parallel zur x-Achse ist. b) Gib die Funktionsgleichung einer Gerade an, die durch den Ursprung geht. c) Gib die Funktionsgleichung einer Gerade an, die diagonal im 45 Grad Winkel den ersten Quadranten halbiert.*

$$a)y = 5 \tag{28}$$

$$b)y = 2x \tag{29}$$

$$c)y = x \tag{30}$$

Verständnis. *Wenn eine Gerade parallel zur x-Achse ist hat sie Steigung m= 0, damit fällt mx komplett weg. Der y Wert ist dann immer der Gleiche, egal was x ist. Wenn eine Gerade durch den Ursprung geht ist der t-Wert null und fällt weg, eine solche Gerade ist dann nur noch durch die Gleichung* $y = mx$ *bestimmt. Bei der Diagonalen ist beim Steigungsdreieck Länge und Höhe gleich also m =1, aus* $y = 1x$ *wird dann einfach* $y = x$.

1.1 Übungen zu linearen Funktionen

Übungsaufgabe 1. *Bestimme zu jeder linearen Funktion für die vorgegebenen x- Werte die y-Werte.*

a) $y = 2x\text{-}3$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

b) $y = \text{-}x+4$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

d) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

e) $y = x$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

f) $y = 2$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

g) $y = 3x$

x	1	7	0	-2	$-\frac{2}{3}$
y					

Übungsaufgabe 2. *Bestimme den Schnittpunkt der linearen Funktion mit der x-Achse? (Formelsammlung S.14.)*

a) $y = 5x\text{-}2$ b) $y = 2x+1$ c) $y = 6x\text{-}3$ d) $y = 2x\text{-}3$ e) $y = \text{-}x+4$

f) $y = \frac{1}{2}x - 1$ g) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ h) $y = x$ i) $y = 2$ j) $y = 3x$

Übungsaufgabe 3. *Bestimme die Gleichung der linearen Funktion, die Steigung m hat und durch den Punkt P verläuft.*

a) $m = 3$, $P(2 \mid -3)$ *b)* $m = 3$, $P(2 \mid -3)$ *c)* $m = 3$, $P(2 \mid -3)$
d) $m = 3$, $P(2 \mid -3)$ *e)* $m = 3$, $P(2 \mid -3)$ *f)* $m = 3$, $P(2 \mid -3)$
g) $m = 3$, $P(2 \mid -3)$ *h)* $m = 3$, $P(2 \mid -3)$ *i)* $m = 3$, $P(2 \mid -3)$

Übungsaufgabe 4. *Wie bestimme ich die Gleichung einer linearen Funktion aus zwei vorgegebenen Punkten P und Q ? (Formelsammlung S.13, mitte)*
a) $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$ *b)* $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$ *c)* $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$
d) $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$ *e)* $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$ *f)* $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$
g) $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$ *h)* $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$ *i)* $P(2 \mid -3), Q(5 \mid -1)$

Übungsaufgabe 5. *Bestimme den Schnittpunkt der beiden linearen Funktionen.*

a) $g_1 : y = 5x - 2$ *und* $g_2 : y = 2x + 1$ *b)* $g_1 : y = 6x - 3$ *und* $g_2 : y = 2x - 3$

c) $g_1 : y = \frac{1}{2}x - 1$ *und* $g_2 : y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ *d)* $g_1 : y = \frac{1}{2}x - 3$ *und* $g_2 : y = 2$

e) $g_1 : y = 3x$ *und* $g_2 : y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$ *f)* $g_1 : y = -\frac{2}{3}x + 1$ *und* $g_2 : y = -\frac{2}{3}x - 1,5$

Übungsaufgabe 6. *Prüfe ob der Punkt A auf,(* oberhalb oder unterhalb) der linearen Funktion liegt.*

a) $y = 5x - 2$, $A(-1 \mid 2)$ *b)* $y = 2x + 1$, $A(-1 \mid 2)$ *c)* $y = 6x - 3$, $A(-1 \mid 2)$

d) $y = \frac{1}{2}x - 1$, $A(-1 \mid 2)$ *e)* $: y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, $A(-1 \mid 2)$ *f)* $y = \frac{1}{2}x - 3$, $A(-1 \mid 2)$

g) $y = 3$, $A(-1,5 \mid 1)$ *h)* $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$, $A(-1 \mid 2)$ *i)* $y = -\frac{2}{3}x + 1$, $A(-\frac{2}{3} \mid -1,5)$

Übungsaufgabe 7. *Wandle die lineare Funktion in die Normalform um.*
a) $2y = 6x - 10$ *b)* $2y - 8x = -4$ *c)* $2y + 3x = 15$ *d)* $3y - 2x = 11$
e) $6y + x + 5 = 0$ *f)* $-4y = 2 - x$ *g)* $4x = -y + 7$ *h)* $0,2y - 2x = 0,5$
i) $15 = 15x - 30y$ *j)* $\frac{1}{5}y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$ *k)* $3y = 2x$ *l)* $4y - 3x = 0$

Übungsaufgabe 8. *Bestimme ich die Gliechung einer Gerade, die parallel zu einer gegebenen Gerade verläuft und durch einen vorgegeben Punkt C verläuft?*

a) $y = 5x - 2$, $C(-1 \mid 3)$ *b)* $y = 2x + 1$, $C(-1 \mid 2)$ *c)* $y = 6x - 3$, $C(0 \mid 2)$

d) $y = \frac{1}{2}x - 1$, $C(5 \mid 2)$ *e)* $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, $C(0 \mid 0)$ *f)* $y = \frac{1}{2}x - 3$, $C(-1 \mid 1)$

g) $y = 3$, $C(-1,5 \mid 1)$ *h)* $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$, $C(12 \mid 2)$ *i)* $y = -\frac{2}{3}x + 1$, $C(-\frac{2}{3} \mid -1,5)$

Übungsaufgabe 9. *Bestimme ich die Gliechung einer Gerade, die senkrecht zu einer gegebenen Gerade verläuft und durch einen vorgegeben Punkt C* $C(-2 \mid 3)$ *verläuft?*

a) $y = 5x - 2$, $C(-1 \mid 3)$ *b)* $y = 2x + 1$, $C(-1 \mid 2)$ *c)* $y = 6x - 3$, $C(0 \mid 2)$

d) $y = \frac{1}{2}x - 1$, $C(5 \mid 2)$ *e)* $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, $C(0 \mid 0)$ *f)* $y = \frac{1}{2}x - 3$, $C(-1 \mid 1)$

g) $y = 3$, $C(-1,5 \mid 1)$ *h)* $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$, $C(12 \mid 2)$ *i)* $y = -\frac{2}{3}x + 1$, $C(-\frac{2}{3} \mid -1,5)$

Übungsaufgabe 10. *Zeichne die linearen Funktionen in ein Koordinatensystem ein*

a) $y = 5x - 2$ *b)* $y = 2x + 1$ *c)* $y = 6x - 3$ *d)* $y = -2x - 3$

e) $y = \frac{1}{2}x - 1$ *f)* $y = -\frac{3}{4}x +!$ *g)* $y = -\frac{1}{3}x - 3$ *h)* $y = \frac{2}{3}x - 2$

i) $y = 2$ *j)* $y = -1,5$ *k)* $y = x$ *l)* $y = \frac{3}{4}x$

m) Gerade durch $P(2 \mid -3)$ *und* $Q(5 \mid -1)$ *n) durch* $P(2 \mid 4)$ *und* $Q(1 \mid -1)$

o) Gerade durch $P(2 \mid -3)$ *mit* $m = 2$ *p) durch* $Q(5 \mid -1)$ *mit* $m = -\frac{3}{5}$

q) Gerade durch $P(2 \mid -3)$ *parallel zur Winkelhalbierenden*

2 Potenzregeln

Definition. *Wenn man eine Zahl a n mal mit sich selbst multipliziert so schreibt man*

$$a^n$$

Man spricht "a hoch n", a nennt man Basis und n den Exponenten.

Die Potenzregeln befinden sich in der Formelsammlung auf Seite 18.

Aufgabe 11. *Wie vereinfache ich einen Term voller Potenzen ohne Bruchstrich?*

$$3a^2b^4c^{-3}4(ab^{-2}c^5)^3c^{-2}b6a^7$$

Zuerst löse ich die Klammer auf, indem ich jeden Faktor hoch 3 rechnen, d.h. die Potenzen verdreifachen sich:

$$3a^2b^4c^{-3}4(a^3b^{-6}c^{15})c^{-2}b6a^7$$

Da der Term eine Malkette ist kann ich die Klammern weglassen und alles sortieren: Erst die Zahlen, dann die a, dann die b, dann die c:

$$3 \cdot 4 \cdot 6a^2a^3a^7b^4b^{-6}bc^{-3}c^{15}c^{-2}$$

Jetzt die Zahlen ausrechnen und die a, b, c zusammenfassen indem die Exponenten addiert werden:

$$72a^{12}b^{-1}c^{10}$$

Aufgabe 12. *Wie vereinfache ich einen Term voller Potenzen mit Bruchstrich?*

$$\frac{3a^2b^4c^{-3}4ab^{-2}c^5c^{-2}b6a^7}{4a^2b^{-3}c^8ab^2 \cdot 14b^{-1}}$$

Wir sortieren oben und unten getrennt nach Zahlen, a, b, c usw.

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 6a^2 \cdot a \cdot a^7b^4b^{-2}bc^{-3}c^5c^{-2}b}{4 \cdot 14 \cdot a^2ab^{-3}b^2b^{-1}c^8}$$

Oben und unten zusammenfassen:

$$\frac{72 \cdot a^{10} \cdot b^{-1}c^0}{56 \cdot a^3b^{-2}c^8}$$

Jetzt die Zahlen vorne trennen und die unteren a, b, c ... nach oben neben die a, b, c, schreiben und dabei das Vorzeichen umdrehen:

$$\frac{72}{56}a^{10}a^{-3}b^{-1}b^2c^0c^{-8}$$

Und dann noch zusammenfassen mit Potenzregenl

$$\frac{72}{56}a^7b^1c^{-8}$$

Bruch kürzen und hoch 1 kann man weglassen gibt dann:

$$\frac{9}{7}a^7bc^{-8}$$

2.1 Übungen zu den Potenzregeln

Übungsaufgabe 11. *Vereinfache die folgenden Terme mit Hilfe der Potenzregeln.*

a) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ *b)* $abcabcabcabc3bac5$ *c)* $2\,x^2 \cdot x \cdot y^6 \cdot y$ *d)* $4x^4y^5z^2 \cdot 3x^2yz^{11}$

e) $p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot p^4 \cdot 12^2$ *f)* $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot x \cdot y^2$ *g)* $\frac{1}{4}e^3 \cdot e^2 \cdot 2$ *h)* $2 \cdot 2^{10} \cdot 4 \cdot 2^6$

Übungsaufgabe 12. *Vereinfache die folgenden Terme mit Hilfe der Potenzregeln.*

a) $a^{-2} \cdot a \cdot a^3 \cdot a^0 \cdot a^{-3} \cdot a^5$ *b)* $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}abca^{-1}b^{-1}c4bac5$ *c)* $2\,x^{-2} \cdot x \cdot y^{-6} \cdot y$

d) $2x^4y^5z^2 \cdot 3x^{-2}y^0z^{-11}$ *e)* $p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot p^{-4} \cdot 12^{-2}$ *f)* $2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 5^2 \cdot x \cdot y^{-2} \cdot x \cdot y^2$

g) $\frac{1}{4}e^3 \cdot e^{-2} \cdot 2^{-1}$ *h)* $2 \cdot 2^{-10} \cdot 4 \cdot 2^6$ *i)* $2cm^2 \cdot 5cm$ *j)*$1000m \cdot 1000m$

3 Binomische Formeln

Satz.

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 \tag{31}$$
$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 \tag{32}$$
$$(\bigcirc + \square) \cdot (\bigcirc - \square) = \bigcirc^2 - \square^2 \tag{33}$$
$$\tag{34}$$

Diese drei Sätze heißen Binomische Formeln. In der Formelsammlung werden die Parameter a und b verwendet (S.8 unten)

Verständnis. *Die binomischen Formeln kürzen die Rechnung etwas ab. Eigentlich muss man Klammer mal Klammer rechnen. Zum Beispiel beim zweiten Fall.*

$$(\bigcirc - \square)^2 = (\bigcirc - \square) \cdot (\bigcirc - \square)$$

Hier muss man jetzt alles mit allem multiplizieren, also Kreis mal Kreis plus Kreis mal minus Kasten etc.

$$\bigcirc \cdot \bigcirc + \bigcirc \cdot (-\square) + (-\square) \cdot \bigcirc + (-\square) \cdot (-\square)$$

Das ergibt

$$\bigcirc^2 \underbrace{- \bigcirc \cdot \square - \square \cdot \bigcirc}_{gleich} + \square^2$$

Und damit

$$\bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

Aufgabe 13. *Wie berechne ich die binomischen Formeln in einfachen Fällen?*

$$a)(x+4)^2 \tag{35}$$
$$b)(y-2)^2 \tag{36}$$
$$c)(x+3) \cdot (x-3) \tag{37}$$

a) Ich rechne analog zu oben:

$$(x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$$

In der Mitte kann ich die 2 und die 4 multiplizieren, rechts rechne ich die Qudratzahl:

$$x^2 + 8x + 16$$

b) genauso, nur mit einem Minus in der Mitte:

$$(y-2)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = y^2 - 4y + 4$$

c) geht noch schneller:

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

Aufgabe 14. *Wie berechne ich die binomischen Formeln, wenn es mehrere Faktoren sind?*

$$a)(3x+4y)^2 \tag{38}$$
$$b)(5y^3-2x^2)^2 \tag{39}$$
$$c)(6x+3a^3)\cdot(6x-3a^3) \tag{40}$$

a) Man muss links und rechts alle Faktoren quadrieren!

$$(3x+4y)^2 = 3^2x^2 + 2\cdot 3x\cdot 4y + 4^2y^2$$

Zahlen noch ausrechnen, in der Mitte sind es hier drei Zahlen:

$$9x^2 + 24xy + 16y^2$$

b) Man muss links und rechts alle Faktoren quadrieren! Dabei muss man die Potenzregeln berücksichtigen, beim Quadrieren heißt das, dass sich Potenzen verdoppeln:

$$(5y^3-2x^2)^2 = 5^2y^6 - 2\cdot 5y^3\cdot 2x^2 + 2^2x^4$$

Zahlen ausrechnen und nach vorne:

$$25y^6 - 20y^3x^2 + 4x^4$$

c) Etwas einfacher, weil ohne Mitte.

$$(6x+3a^3)\cdot(6x-3a^3) = 6^2x^2 - 3^2a^6 = 36x^2 - 9a^6$$

3.1 Übungen zu den binomischen Formeln

Übungsaufgabe 13. *Löse die Klammern auf mithilfe der binomischen Formeln.*

a) $(8+x)^2$ *b)* $(4+y)^2$ *c)* $(-t-5)^2$ *d)* $(m+6)\cdot(m-6)$ *e)* $(5+4y)^2$

f) $(x-2)\cdot(x+2)$ *g)* $(3x-1)^2$ *h)* $(7a-4bc)^2$

Übungsaufgabe 14. *Forme die Terme zu Klammertermen um.*

a) $16-8j+j^2$ *b)* k^2-4 *c)* $4x^2+4x+1$ *d)* $s^2+40s+400$ *e)* $0,49a^2-36b^2$

f) $2,89+8,16e+5,76e^2$ *g)* $y^2+8xy+16x^2$ *h)* $25a^2-10a+1$

Übungsaufgabe 15. *Ergänze die Lücken so, dass eine binomische Formel entsteht.*

a) $100 - \boxed{} + 36a^2$

b)$\boxed{} + 8xy + 4x^2$

c) $25b^2 + \boxed{} + 4$

d) $49y^2 - 70y + \boxed{}$

Übungsaufgabe 16. *Vervollständige die Terme.*

a) $(6a^2 + \boxed{}) = 36a^4 + \boxed{} + 16y^4)$

b) $(\boxed{} + 3x^3b) = 49k^4a^2 + 42k^2ax^3b + \boxed{}$

c)$(0,9c^2j - \boxed{}) = \boxed{} - 0,72c^2jf^4p + 0,16f^8p^2$

4 Der Satz des Pythagoras

Definition. *Die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks gegenüber des rechten Winkels heißt Hypothenuse. Die beiden kurzen Seiten heißen Katheten.*

Satz. *Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras. Die Summe der Quadratzahl der Hypothenuse H ist gleich der Summe der Quadratzahlen der beiden Katheten, K_1, K_2*

$$H^2 = {K_1}^2 + {K_2}^2$$

. Gilt der Satz nicht, ist das Dreieck nicht rechtwinklig. Oft verwendet man die Parameter a und b für die Katheten und c für die Hypothenuse. (Siehe Formelsammlung S.37)

Aufgabe 15. *Wie berechne ich die Hypothenuse im rechtwinkligen Dreieck, wenn ich die beiden Kathetenlängen $K_1 = 9$ und $K_2 = 7$ gegeben habe?*

$$H^2 = 9^2 + 7^2 \tag{41}$$
$$H^2 = 81 + 49 \tag{42}$$
$$H^2 = 130 \tag{43}$$
$$H = \sqrt{130} \tag{44}$$
$$H = 11,40 \tag{45}$$

Aufgabe 16. *Wie berechne ich die Kathete im rechtwinkligen Dreieck, wenn ich die andere Kathete $K = 8$ und die Hypothenuse $H = 12$ gegeben habe?*

$$12^2 = 8^2 + K^2 \tag{46}$$
$$144 = 64 + K^2 \mid -64 \tag{47}$$
$$80 = K^2 \tag{48}$$
$$\sqrt{80} = K \tag{49}$$
$$K = 8,94 \tag{50}$$

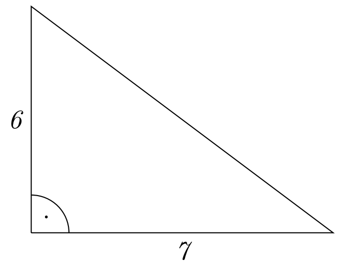
Aufgabe 17. *Wie prüfe ich ob ein Dreieck mit den Seitenlängen 5, 11 und 12 rechtwinklig ist?*

Man prüft den Satz des Pythagoras, links setzt man die grösste Länge, rechts die beiden kurzen ein.

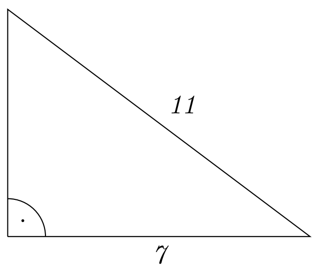
$$12^2 = 5^2 + 11^2 \tag{51}$$
$$144 = 25 + 121 \tag{52}$$
$$144 = 146 \tag{53}$$
$$\tag{54}$$

Die Aussage ist falsch, das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

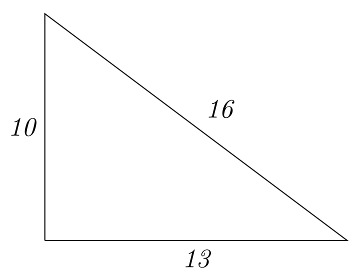
Übungsaufgabe 17. *Berechne die Hypothenuse*



Übungsaufgabe 18. *Berechne die fehlende Kathete*



Übungsaufgabe 19. *Prüfe, ob das Dreieck rechtwinklig ist.*



5 Kreis und Kugel

Definition. *Ein Kreis ist vollständig durch seinen Radius r bestimmt. Für Fläche A und Umfang u gelten die beiden Formeln*

$$A = r^2 \cdot \pi$$

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi$$

wobei π die Kreistzahl mit unendlichen vilelen Nachkommastellen ist.

Aufgabe 18. *Wie bestimme ich die Fläche und den Umfang eines Kreises, wenn der Radius $r = 6$ cm gegeben ist?*

Man rechnet ersteinmal ohne Einheiten und setzt in die Formelen ein. Für π verwenden wir standardmäßig die Näherung $\pi = 3,14$

$$A = r^2 \cdot \pi = 6^2 \cdot 3,14 = 113,04[cm^2]$$

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 6 \cdot 3,14 = 37,68[cm]$$

Man setzt erst am Ende die Einheit in eckige Klammern, dann gibt man einen Antwortsatz: Die Fläche beträqt $113,04cm^2$, der Umfang beträgt 37,68 cm.

Aufgabe 19. *Wie bestimme ich den Radius eines Kreises, wenn ich die Fläche $A = 8m^2$ gegeben habe?*

Wir setzen die Fläche in die Formel ein:

$$\begin{aligned} A &= r^2 \cdot \pi && (55)\\ 8 &= r^2 \cdot 3,14 && |: 3,14 \quad (56)\\ 2,55 &= r^2 && |\sqrt{} \quad (57)\\ 1,60 &= r && (58)\\ r &= 1,60[m] && (59) \end{aligned}$$

Antwort: Der Radius ist 1,6 m lang.

Aufgabe 20. *Wie bestimme ich den Radius eines Kreises, wenn ich den Umfang $u = 28cm$ gegeben habe?*

Wir setzen den Umfang in die Formel ein:

$$\begin{aligned} u &= 2 \cdot r \cdot \pi && (60)\\ 28 &= 2 \cdot r \cdot 3,14 && (61)\\ 28 &= r \cdot 6,28 && |: 6,28 \quad (62)\\ 4,46 &= r && (63)\\ r &= 4,46[cm] && (64) \end{aligned}$$

Antwort: Der Radius ist 4,46 cm lang.

Definition. *Eine Kugel ist vollständig durch ihren Radius r bestimmt. Für Volumen V und Oberfläche O gelten die beiden Formeln*

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

wobei π die Kreistzahl mit unendlichen vilelen Nachkommastellen ist.

Aufgabe 21. *Wie bestimme ich das Volumen und die Oberfläche einer Kugel, wenn der Radius $r = 5$ cm gegeben ist?*

Man rechnet ersteinmal ohne Einheiten und setzt in die Formelen ein. Für π verwenden wir standardmäßig die Näherung $\pi = 3,14$

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 3,14 = 523,33[cm^3]$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot 5^2 \cdot 3,14 = 314[cm^2]$$

Man setzt erst am Ende die Einheit in eckige Klammern, dann gibt man einen Antwortsatz: Das Volumen beträqt $523,33cm^3$, die Oberfläche beträgt $314cm^2$.

Aufgabe 22. *Wie bestimme ich den Radius einer Kugel, wenn ich das Volumen $V = 2m^3$ gegeben habe?*

Wir setzen das Volumen in die Formel ein:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \tag{65}$$

$$2 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3,14 \tag{66}$$

$$2 = r^3 \cdot 4,19 \qquad |: 4,19 \tag{67}$$

$$0,48 = r^3 \qquad | \sqrt[3]{} \tag{68}$$

$$0,78 = r \tag{69}$$

$$r = 0,78[m] \tag{70}$$

Antwort: Der Radius ist 0,78 m lang. Die 3te Wurzel berechnet man mit der Taschenrechner Taste $\sqrt[y]{x}$.

Aufgabe 23. *Wie bestimme ich den Radius einer Kugel, wenn ich die Oberfläche $O = 12dm^2$ gegeben habe?*

Wir setzen die Oberfläche in die Formel ein:

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \tag{71}$$
$$12 = 4 \cdot r^2 \cdot 3,14 \tag{72}$$
$$12 = r^2 \cdot 12,56 \qquad |: 12,56 \tag{73}$$
$$0,96 = r^2 \qquad | \sqrt{} \tag{74}$$
$$0,98 = r \tag{75}$$
$$r = 0,98[dm] \tag{76}$$

Antwort: Der Radius ist 0,98 dm lang.

Übungsaufgabe 20. *Gegeben ist der Radius r eines Kreises. Berechne die Kreisfläche und den Umfang des Kreises.*

$a)r = 10cm \quad b)r = 4mm \quad c)r = 1km \quad d)r = 2,4dm$

$e)r = 0,92m \quad f)r = \frac{1}{4}m \quad g)r = 0,02mm \quad h)r = 5,8Zoll$

Übungsaufgabe 21. *Gegeben ist die Fläche A eines Kreises. Berechne den Radius r.*

$a)A = 10cm^2 \quad b)A = 4mm^2 \quad c)A = 1km^2 \quad d)A = 3,14dm^2$

$e)A = 6,92m^2 \quad f)A = \frac{1}{4}m^2 \quad g)A = 0,02mm^2 \quad h)A = 9\pi m^2$

Übungsaufgabe 22. *Gegeben ist derUmfang u eines Kreises. Berechne den Radius r des Kreises.*

$a)u = 12cm \quad b)u = 4mm \quad c)u = 1km \quad d)u = 2,4dm$

$e)u = 0,94m \quad f)u = \frac{1}{4}m \quad g)u = 0,02mm \quad h)u = 6Zoll$

Übungsaufgabe 23. *Gegeben ist der Radius r einer Kugel. Berechne das Volumen und die Oberfläche der Kugel.*

$a)r = 10cm \quad b)r = 4mm \quad c)r = 1km \quad d)r = 2,4dm$

$e)r = 0,92m \quad f)r = \frac{1}{4}m \quad g)r = 0,02mm \quad h)r = 5,8 \cdot 10^5 m$

Übungsaufgabe 24. *Gegeben ist das Volumen V einer Kugel. Berechne den Radius r der Kugel.*

$a)V = 100cm^3 \quad b)V = 40mm^3 \quad c)V = 1km^3 \quad d)V = 3,14dm^3$

$e)V = 63,92m^3 \quad f)V = \frac{1}{4}m^3 \quad g)V = 0,02mm^3 \quad h)V = 48\pi m^3$

Übungsaufgabe 25. *Gegeben ist die Oberfläche O einer Kugel. Berechne den Radius r der Kugel.*

$a)u = 12cm^2 \quad b)u = 4mm^2 \quad c)u = 1km^2 \quad d)u = 2,4dm^2$

$e)u = 0,94m^2 \quad f)u = \frac{1}{4}m^2 \quad g)u = 0,02mm^2 \quad h)u = 100\pi m^2$

6 Quadratische Gleichungen

Definition. *Eine Gleichung, in der eine unbekannte Größe (meistens x) mit dem Exponenten 2, also als x^2, aber mit keinem höheren Exponenten vorkommt, heißt quadratische Gleichung*

Aufgabe 24. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2 = 0$, z.B. $1,5x^2 = 0$?*

$$1,5x^2 = 0 \qquad |: 1,5 \qquad (77)$$
$$x^2 = 0 \qquad | \sqrt{} \qquad (78)$$
$$x = 0 \qquad (79)$$

Verständnis. *Man kann die Lösung x=0 direkt sehen, denn nur* 0^2 *ergibt wieder 0. Man spricht hier auch von einer doppelten Nullstelle, die Parabel* ax^2 *berührt die x-Achse im Ursprung* $(0 \mid 0)$

Aufgabe 25. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2 + b = 0$, z.B. $-1,5x^2 + 9 = 0$?*

$$-1,5x^2 + 9 = 0 \qquad | -9 \qquad (80)$$
$$-1,5x^2 = -9 \qquad |: (-1,5) \qquad (81)$$
$$x^2 = 6 \qquad | \sqrt{} \qquad (82)$$

An dieser Stelle unterscheidet sich das Vorgehen von dem vorherigen wie beim Satz des Pythagoras, Kreis- oder Kugelaufgaben. Es gibt hier zwei Wurzeln, die die Gleichung erfüllen. Wir müssen beide Lösungen hinschreiben: Das Zeichen v zwischen den x bedeutet "oder".

$$x = \sqrt{6} \quad \vee \quad x = -\sqrt{6}$$

Schließlich berechnen wir die Wurzeln mit dem Taschenrechner und runden auf zwei Nachkommastellen:

$$x = 2,45 \quad \vee \quad x = 2,45$$

Aufgabe 26. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2+b = 0$, z.B. $1,5x^2+4 = 0$, wenn am Ende rechts eine negative Zahl steht?*

$$-1,5x^2 + 9 = 0 \qquad | -9 \qquad (83)$$
$$1,5x^2 = -9 \qquad |: 1,5 \qquad (84)$$
$$x^2 = -6 \qquad (85)$$

An dieser Stelle müssen wir feststellen, dass es keine Lösung gibt. Dazu schreiben wir rechts unter x^2 folgendes:

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = -6$$

Jetzt schreiben wir den Satz. Es gibt für die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 27. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2+bx=0$, z.B. $-1,5x^2+4x=0$?*

Um diese Gleichung zu lösen müssen wir sie umschreiben. Dazu müssen wir x *ausklammern*. Danach müssen wir die Gleichung in zwei Gleichungen *aufteilen*. Nach dem Aufteilen rechnen wir rechts die Gleichung zu Ende.

$$-1,5x^2+4x=0 \qquad |\ \textit{ausklammern} \tag{86}$$
$$x\cdot(-1,5x+4)=0 \qquad |\ \textit{aufteilen} \tag{87}$$
$$x=0 \quad \vee \quad -1,5x+4=0 \qquad |-4 \tag{88}$$
$$-1,5x=-4 \qquad |:(-1,5) \tag{89}$$
$$x=\frac{8}{3} \tag{90}$$

Die beiden Lösungen sind dann $x=0$ oder $x=\frac{8}{3}$

Verständnis. *Da die linke Seite aus einer Summe (oder Differnez) von zwei Termen in denen x vorkommt besteht ist x= 0 immer eine Lösung. Die obere Methode dient also dazu die zweite Lösung zu bekommen. Gleichungen dieser Art haben immer zwei Lösungen, die entsprechenden Parabeln gehen durch den Ursprung und ein weiteres Mal durch die x-Achse.*

Aufgabe 28. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2+bx+c=0$, z.B. $-1,5x^2+4x-2,5=0$?*

Wir beschriften die Zahlen vor den x und nennen sie a, b und c:

$$\underbrace{-1,5}_{=a}x^2\underbrace{+4}_{=b}x\underbrace{-2,5}_{=c}=0$$

Also a = -1,5 b = 4 c = -2,5
Wir setzen diese drei in die bekannte Mitternachtsformel (lernen!) ein:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Negative Zahlen setzt man in Klammern ein:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1,5)\cdot(-2,5)}}{2\cdot(-1,5)}$$

Jetzt rechnet man mit dem Taschenrechner den Term unter der Wurzel, Diskriminante D genannt aus. Man gibt ihn ohne Wurzel ein. Genauso rechnet man den Nenner aus:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{1}}{-3}$$

Ist die Diskriminante, hier 1, postiv, so gibt es zwei Lösungen. Diese rechnet man mit dem Taschenrechner, einmal mit plus, einmal mit minus.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = \frac{5}{3}$$

Aufgabe 29. *Wie löse ich eine Gleichung vom Typ $ax^2 + bx + c = 0$, z.B. $2x^2 + 4x + 3 = 0$, wenn die Diskriminante unter der Wurzel negativ ist?*

Wir beschriften die Zahlen vor den x und nennen sie a, b und c:

$$\underbrace{2}_{=a} x^2 \underbrace{+4}_{=b} x \underbrace{3}_{=c} = 0$$

Also a = 2 b = 4 c = 3

Wir setzen diese drei in die bekannte Mitternachtsformel (lernen!) ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Negative Zahlen setzt man in Klammern ein:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

Jetzt rechnet man mit dem Taschenrechner den Term unter der Wurzel, Diskriminante D genannt aus. Man gibt ihn ohne Wurzel ein. Genauso rechnet man den Nenner aus:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{4}$$

Da die Diskriminate, hier -8, negativ ist, hat die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 30. *Wie löse ich eine kompexe quadratische Gleichung, die auf beiden Seiten Terme hat, z.B. $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 = -3x^2 + 3x - 1,5$?*

Wir bringen alles auf die linke Seite mittels Äquivalenzumformung und schreiben die gleichen Potenzen zusammen:

$$\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 = -3x^2 + 3x + 1,5 \mid +3x^2 \;\; -3x \;\; -1,5$$
$$\frac{1}{2}x^2 + 3x^2 + 4x + 3x + 3 - 1,5 = 0$$

Jetzt fassen wir die x^2, die x und die Zahlen (mit dem Taschenrechner, falls nötig) zusammen:

$$4,5x^2 + 7x + 1,5 = 0$$

Man bekommt eine der oberen Gleichungen. In diesem Fall verwendet man die Mitternachtsformel mit a = 4,5   b = 7   und c = 1,5.

Wenn man a, b, c einsetzt ergibt das:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4,5 \cdot 1,5}}{2 \cdot 4,5}$$

Diskriminante und Nenner mit Taschenrechner ausrechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{22}}{9}$$

Da die Diskriminante, hier 22, postiv ist gibt es zwei Lösungen der Gleichung:

$$x_1 = -0,26$$

$$x_2 = -1,30$$

6.1 Übungen zu quadrataischen Gleichungen

Übungsaufgabe 26. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 = 0$ *b)* $2,2x^2 = 0$ *c)* $x^2 = 0$ *d)* $\frac{1}{4}x^2 = 0$ *e)* $(x-4)^2 = 0$

f) $\frac{1}{4}(x+2)^2 = 0$ *g)* $-3x^2 + 2 = 2$ *h)* $(3x-6)^2 = 0$ *i)* $\frac{x^2}{4} = 0$

Übungsaufgabe 27. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3 = 0$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4 = 0$ *c)* $x^2 + 1 = 0$ *d)* $(x-4)^2 + 4 = 0$

e) $-\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3 = 0$ *f)* $-3x^2 + 2 = 3$ *g)* $(3x-6)^2 = -3$ *h)* $\frac{x^2}{-4} - 1 = 0$

Übungsaufgabe 28. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 - 3 = 0$ *b)* $-2,2x^2 + 4,4 = 0$ *c)* $x^2 - 1 = 0$ *d)* $(x-4)^2 - 4 = 0$

e) $\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3 = 0$ *f)* $-3x^2 + 2 = 1$ *g)* $(3x-6)^2 = 3$ *h)* $\frac{x^2}{4} - 1 = 0$

Übungsaufgabe 29. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3x = 0$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4x = 0$ *c)* $x^2 + x = 0$ *d)* $x^2 + 4x = 0$

e) $-\frac{1}{4}x^2 - 3x = 0$ *f)* $-3x^2 + 2 = x + 2$ *g)* $(3x)^2 = -3x$ *h)* $\frac{x^2}{-4} - x = 0$

Übungsaufgabe 30. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3x - 30 = 0$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4x + 3,3 = 0$ *c)* $x^2 + x - 3 = 0$

d) $x^2 + 4x + 4 = 0$ *e)* $-\frac{1}{4}x^2 - 3x - 12 = 0$ *f)* $-3x^2 + 2x - 8 = 0$

g) $(3x)^2 - 3x + 10 = 0$ *h)* $\frac{x^2}{4} - x + 2 = 0$ *i)* $3(x^2 - 8x + 12) = 0$

Übungsaufgabe 31. *Löse die Gleichungen:*

a) $6x^2 + 3x - 30 = 9x^2 - 3x + 20$ *b)* $-2,2x^2 - 4,4x + 3,3 = x + 3$

c) $x^2 + x - 3 = 4x^2 - x - 4$ *d)* $x^2 + 4x + 4 = -x^2 - 2x + 12$

e) $-\frac{1}{4}x^2 - 3x - 12 = x^2 - 3x + 1$ *f)* $-3x^2 + 2x - 8 = -3x^2 + 5x - 3$

7 Quadratische Funktionen in der allgemeinen Form

Aufgabe 31. *Wie bestimme ich bei einer Quadratischen Funktion* $p(x) = x^2 - 3x + 7$ *zum x-Wert -2 den entsprechenden y-Wert?*

Man setzt für x den Wert -2 (in Klammern wenn es ein negativer Wert ist) in den Funktionsterm ein:

$$y = p(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 7 = 4 + 6 + 7 = 17$$

Der Punkt im Koordinatensystem ist dann $P(-2 \mid 17)$

Aufgabe 32. *Wie bestimme ich den Schnittpunkt einer Quadratischen Funktion* $p(x) = x^2 + 2x + 7$ *mit der y-Achse?*

Man setzt für x null ein:

$$p(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 7 = 7$$

$S(0 \mid 7)$

Aufgabe 33. *Wie bestimme ich die Schnittpunkte einer Quadratischen Funktion* $p(x) = x^2 - 2x - 7$ *mit der x-Achse?*

Man setzt den Funktionsterm gleich null:

$$x^2 - 2x - 7 = 0$$

Diese quadratische Gleichung löst man, meistens wie hier mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hier haben wir:
a = 1   b = -2   c = -7

Negative Zahlen setzt man in Klammern ein:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$$

Jetzt rechnet man mit dem Taschenrechner den Term unter der Wurzel, Diskriminante D genannt aus. Man gibt ihn ohne Wurzel ein. Genauso rechnet man den Nenner aus:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2}$$

Wenn die Diskriminante positiv ist, so wie hier so gibt es zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. (Wenn negativ dann gibt es keinen, wenn die Diskriminante null ist gibt es einen Berührpunkt).

Hier ergibt sich $x_1 = 3,83 \quad x_2 = -1,83$

Die beiden Schnittpunkte sind dann: $N_1(3,83 \mid 0)$ und $N_2(-1,83 \mid 0)$.

7.1 Übungen zu Quadratischen Funktionenm in allgemeiner Form

Übungsaufgabe 32. *Berechne den Schnittpunkt der angegebenen Funktionen mit der y-Achse.*

a) $y = -x^2 + 2x + 3$ *b)* $y = x^2 + 2,5x - 4$ *c)* $y = 3x^2 + 3x - 9$ *d)* $y = 2x^2 + 3x$
e) $y = x^2$ *f)* $y = -x^2 - 4x + 5$ *g)* $y = -x^2 + 9,5x + 3,75$ *h)* $y = x^2 + 3x - 3$
i) a) $y = x^2 - 3$ *j)* $y = x^2 - 4x + 3$ *k)*$y = (x-2)^2 - 1$ *l)* $y = x^2 + 6x + 8$
n) $y = (x-1)^2 + 5$ *o)* $y = (x+3)^2 + 2$ *p)* $y = -x^2 + 3x$ *q)* $y = 5x^2 + 11$

Übungsaufgabe 33. *Berechne die Schnittpunkte der angegebenen Funktionen mit der x-Achse.*

a) $y = -3x^2 + 2x + 3$ *b)* $y = x^2 + 2,5x - 4$ *c)* $y = 5x^2 + 3x - 9$ *d)* $y = x^2 + 3x$ *e)* $y = x^2$ *f)* $y = -x^2 - 4x + 5$ *g)* $y = -x^2 + 9,5x + 3,75$ *h)* $y = 2x^2 + 3x - 3$ *i) a)* $y = x^2 - 3$ *j)* $y = x^2 - 4x + 3$ *k)*$y = (x-2)^2 - 1$ *l)* $y = x^2 + 6x + 8$ *n)* $y = (x-1)^2 + 5$ *o)* $y = (x+3)^2 + 2$ *p)* $y = -2x^2 + 3x$ *q)* $y = x^2 + 11$

Übungsaufgabe 34. *Welche dieser Punkte liegen auf der Parabel mit der Funktionsgleichung* $y = -x^2 + 2x + 3$

a) $P(1 \mid 1)$ *b)* $Q(4 \mid -5)$ *c)* $K(0 \mid 3)$ *d)* $J(-2 \mid 2,5)$

Übungsaufgabe 35. *Ergänze die fehlenden y-Werte:*
$y = -x^2 - 4x + 1$

a) $A(2 \mid \boxed{})$ *b)* $P(6 \mid \boxed{})$, $Q(-1 \mid \boxed{})$ *c)* $D(1,5 \mid \boxed{})$

Übungsaufgabe 36. *Bestimme die Schnittpunkte der folgenden Funktionen:*

a) $y = x^2 - 2x + 3$ *geschnitten mit* $y = x^2 - 4x + 3$
b) $y = (x-2)^2 - 1$ *geschnitten mit* $y = -x^2 + 3x$
c) $y = x^2 + 6x + 8$ *geschnitten mit* $y = 4x - 1$
d) $y = (x-1)^2 + 5$ *geschnitten mit* $y = (x+3)^2 + 2$
e) $y = x^2 + 2,5x - 4$ *geschnitten mit* $y = x^2 + 6x + 2$
f) $y = (x-2)^2 - 1$ *geschnitten mit* $y = (x-1)^2 + 5$

g) $y = x^2 + 6x + 8$ *geschnitten mit* $y = 2(x + 3)$

Übungsaufgabe 37. *Skizziere mit Hilfe einer Wertetabelle:*

a) $y = -x^2 + 2x + 3$ *b)* $y = x^2 + 2,5x - 4$ *c)* $y = 3x^2 + 3x - 9$ *d)* $y = 2x^2 + 3x$
e) $y = x^2$ *f)* $y = -x^2 - 4x + 5$ *g)* $y = -x^2 + 9,5x + 3,75$ *h)* $y = x^2 + 3x - 3$

8 Quadratische Funktionen: Die Scheitelpunktform

8.1 Übungen zur Scheitelpunktform

Übungsaufgabe 38. *Wandle in die allgemeine Form um:*

a) $y = (x - 3)^2 + 6$ *b)* $y = (x + 2)^2 - 1$ *c)* $y = -(x + 2)^2 + 7$
d) $y = -(x - 3)^2 - 6$ *b)* $y = -(x + 5)^2 + 25$ *c)* $y = -2(x + 1,5)^2 + 7$

Übungsaufgabe 39. *Stelle jeweils die Funktionsgleichung einer nach oben geöffneten Normalparabel in Scheitelpunktsform auf. Die Scheitelpunkte sind gegeben.*

a) $S_1(4 \mid 6)$ *b)* $S_2(1 \mid 2)$ *c)* $S_3(-1,5 \mid -1,5)$ *d)* $S_4(-3,75 \mid 2,16)$

Übungsaufgabe 40. *Ermittle den Scheitelpunkt der Parabeln und gib diese in der Scheitelpunktsform an.*

a) $y = x^2 + 6x + 5$ *b)* $y = x^2 + 4x - 1$ *c)* $y = x^2 - 8x + 10$ *d)* $y = -x^2 + 2x + 4$
e) $y = x^2$ *f)* $y = -x^2 - 4x + 5$ *g)* $y = -x^2 + 9,5x + 3,75$ *h)* $y = x^2 + 3x - 3$

Übungsaufgabe 41. *Zwei Normalparabeln schneiden sich in den Punkten* $P(-3 \mid -1)$ *und* $Q(2 \mid 4)$*. Die Parabel* p_1 *ist nach oben geöffnet und* p_2 *ist nach unten geöffnet.*
a) Berechne die Funktionsgleichungen der Parabeln p_1 *und* p_2*.*
b) Berechne die Scheitpunkte von p_1 *und* p_2*.*
c) Berechne die Funktionsgleichung für die Gerade, die durch die Schnittpunkte der Parabeln verläuft. (Tip: Gerade erstellen mit 2 gegebenen Punkten)

9 Gleichungssysteme

Wenn man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vorliegen hat, so spricht man von einem Linearen Gleichungssystem. Dieses lässt sich in der Regel lösen, d.h. man kann die beiden Unbekannten, z.B. x und y rechnerisch bestimmen. Dazu gibt es drei gängige Verfahren, von denen eins, das Additionsverfahren, gewisse Vorteile hat, weswegen wir dieses hier als Standard vorstellen. Wir erarbeiten es in vier Schritten:

9.1 Übungen zu Gleichungssystemen

Übungsaufgabe 42. *Löse mit dem Gleichsetzungsverfahren.*

a) $x + 6y = 9$ *und* $4y - 2x = 42$

b) $2 = y - 2x$ *und* $3x + y = 27$

Übungsaufgabe 43. *Löse mit dem Einsetzungsverfahren.*

a) $3x + 3y = 24$ *und* $x + 11 = 20$

b) $y - 2x = 7$ *und* $3x + 30 = 8y$

Übungsaufgabe 44. *Löse mit dem Additionsverfahren.*

a) $2x + 3y = 20$ *und* $8x - 3y = 5$

b) $4x + y = 65$ *und* $-4x + 7y = 71$

Übungsaufgabe 45. *Löse mit einem Verfahren deiner Wahl.*

a) $7x + 8y = 5$ *und* $6y + 6x = 48$

b) $3x - 12 = 4y$ *und* $30 + 3y = 4x$

c) $8x - 8y - 8 = 0$ *und* $2x + 2y = 30$

d) $8x + 6y + 2 = 0$ *und* $7x + 3y - 10 = 0$

Übungsaufgabe 46. *Auf einer nach oben geöffneten Normalparabel liegen die Punkte* $A(-4 \mid 6)$ *und* $B(2,5 \mid 22,25)$.
a)Berechne die zugehörige Funktionsgleichung in Normalform.
b) Berechne die Koornidaten des Scheitelpunkts.

10 Bruchgleichungen

Eine Gleichung, bei der x Im Nenner Steht heißt Bruchgleichung. Eine solche Gleichung wird grundsätzlich anders gelöst als eine herkömliche Gleichung. Bevor man eine Bruchgleichung löst bestimmt man den Definitionsbereich, den Bereich aller Zahlen, die man in die Gleichung einsetzen darf. Dazu setzt man den Nenner der Bruchgleichung gleich null und ermittelt so die Definitionslücken.

Aufgabe 34. *Wie bestimme ich die Definitionslücken bei einer Bruchgleichung mit einem Nenner, der x enthält?*

$$\frac{2}{2x-3} = 6$$

Man setzt den Nenner mit der Variablen x gleich null und löst die Gleichung nach x auf:

$$2x - 3 = 0 \mid +3 \tag{91}$$
$$2x = 3 \mid : 2 \tag{92}$$
$$x = 1,5 \tag{93}$$

Bei 1,5 ist die Definitionslücke. Jetzt schreibt man den Definitionsbereich folgendermaßen auf:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$$

Aufgabe 35. *Wie bestimme ich die Definitionslücken bei einer Bruchgleichung die meherere Nenner mit x enthält?*

$$\frac{-4x}{6-x} = \frac{6}{5x}$$

Hier setzt man jeden Nenner gleich null und löst die Gleichung nach x auf. Die erste Gleichung:

$$6 - x = 0 \mid -6 \tag{94}$$
$$-x = -6 \mid : (-1) \tag{95}$$
$$x = 6 \tag{96}$$

Und die zweite Gleichuncg:

$$5x = 0 \mid : 5 \tag{97}$$
$$x = 0 \tag{98}$$

Jetzt werden beiden Definitionslücken aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{6; 0\}$$

Nachdem man den Definitionsbereich berechnet hat, löst man die Bruchgleichungen nach der unbekannten Variable auf.

11 Höhensatz

12 Wachstumsprozesse

Wenn eine Größe, zum Beispiel 3600 kg um 17% wächst, so kann man das mit Hilfe der %Rechnung lösen. Hier gibt es vierschiedene Ansätze. Im MSA ist es egal welchen Ansatz man für die einfache % - Rechnung wählt. In unserem Beispiel kann man z.B. rechnen:

$$\frac{3600 \cdot 17}{100} = 36 \cdot 17 = 612$$

Die Größe ist also um 612 kg gewachsen und beträgt jetzt 3600 kg + 612 kg = 4212 kg.
Wenn eine Größe jedoch immer wieder um eine feste %-Zahl wächst, dann wird es sehr mühlselig die Rechnung immer wieder auszuführen. Hier bietet sich eine matematisch schnellere Rechnung an. Das Standardbeispiel für exponentielles Wachstum (so nennt man Wachstum, bei dem etwas immer wieder um eine feste %-Zahl wächst) sind die Zinsen bei einer Bank, die jährlich ausbezahlt werden. Nehmen wir ein Anfangskapital von 40.000 € und einen Zinssatz von 5%. Dann rechnet man das Kapital nach einem Jahr folgendermaßen:

$$40.000 \cdot (1 + \frac{5}{100}) = 40.000 \cdot (1,05) = 42.000$$

Die 2000 € sind die Zinsen nach einem Jahr. Nach zwei Jahren rechnet man folgendermaßen:

$$(40.000 \cdot (1 + \frac{5}{100}))(1 + \frac{5}{100}) = 40.000 \cdot (1 + \frac{5}{100})^2 = 44100$$

Die Tatsache, dass man im zweiten Jahr mehr Zinsen bekommt, nennt man Zinseszins, denn man bekommt Zinsen auf die Zinsen vom ersten Jahr. Jetzt hat man in der Mathematik ein System entwickelt, so dass sich nach 10 Jahren das Kapital direkt ausrechnen lässt:

$$40.000 \cdot (1 + \frac{5}{100})^{10} = 65155,79$$

Wenn man jetzt eine unbekannte Zeit t (t steht für time) ansetzt bekommt man die allgemeine Wachstumsfunktion:

$$W(t) = 40.000 \cdot (1 + \frac{5}{100})^t$$

Für jede Wachstumsfunktion braucht man also einen Anfangswert W_0 und einen Prozentwert p. Allgemein schreibt man also:

$$W(t) = W_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$$

Wenn man eine Wachstumsgleichung gegeben hat, so kann man damit drei typische Aufgaben bearbeiten. Gehen wir einmal davon aus, dass jemand 6000 € zu einem Zinssatz von 3,3 % anlegt. Dann kann man ausrechnen, wie groß das Vermögen nach 6 Jahren ist:

$$W(6) = 6000 \cdot (1 + \frac{3,3}{100})^6 = 7290,43$$

12.1 Aufgaben zu Wachstumsprozessen

Aufgabe 36. *(Zinsen). Bei der B-Bank werden 3,75% Zinsen pro Jahr gezahllt.*
a) Jemand hat 28.000 € auf dem Konto liegen. Wie viel % Zinsen kann er in zwei Jahren, wie viel in 6 Jahren erwarten?
b) Nach wie vielen Jahren hat sich sein Geld auf 50.000 € erhöht?
c) Wie viel bekomt man nach einer Woche ausbezahlt, wie kann man hier sinvoll rechnen?
d) Eine andere Bank hat folgendes Angebot: Wenn man die 28.000€ 5 jahre liegen läßt bekommt man 33333 € ausbezahlt. Wie lautet der Zinssatz?

Aufgabe 37. *(Bevölkerungswachstum) In einem Land mit 16 Mil. Einwohnern wächst die Bevölkerung pro Jahr.*
a) In den ersten drei Jahren wächst die Bevölkerung um je 4%. Wie viele Einwohner sind das dann?
b) Wie viele Jahre würde es dauern bis die Bevölkerung auf 20 Mil. angewachsen ist?
c) Wie lange dauert es, bis sich die Bevölkerungszahl verdoppelt?
d) In einem anderen Land ist die Bevölkerung in fünf Jahren von 10 Mil. auf 12 Mil. gewachsen. Wie groß ist die jährliche Wachstumsrate?

13 Zerfallsprozesse

Zerfallsprozesse laufen analog zu Wachstumsprozessen. Wenn eine Größe z.B. 23 Liter jede Stunde um 8 % abnimmt so rechnen wir analog zum Wachstum:

$$N(t) = 23 \cdot (1 - \frac{8}{100})^t$$

Es ergeben sich auch hier vier Typen von Aufgaben. Zum ersten kann man ausrechnen, wie viel Liter es nach 7 Stunden noch gibt. Dazu setzt man für t einfach 7 ein:

$$N(7) = 23 \cdot (1 - \frac{8}{100})^7 = 23 \cdot 0,92^7 = 23 \cdot 0,5578 = 12,83$$

Es sind noch 12,83 Liter vorhanden.

Zum zweiten kann man die Zeit ausrechnen, die die es dauert bis z.B. nur noch 5 Liter übrig sind. Dazu setzt man den y-wert 5 vorne für N(t) in die Wachstumsgleichung ein:

$$5 = 23 \cdot (1 - \frac{8}{100})^t$$

Diese Gleichung löst man auf:

$$5 = 23 \cdot (1 - \frac{8}{100})^t \ |: 23$$

$$\frac{5}{23} = 0,92^t$$

$$t = log_{0,92}(\frac{5}{23})$$

$$t = 18,03$$

Nach knapp 18 Stunden sind noch 5 Liter übrig.

Zum Dritten kann man die % Abnahme aus zwei gegebenen Werten berechnen. Eine anndere Flüssigkeit veringert sich exponentiell in 6 Stunden von 20 auf 16 Liter. Dann setzen wir alles in die Zerfallsgleichung ein:

$$16 = 20 \cdot (1 - \frac{p}{100})^6$$

Diese Gleichung lösen wir wie beim Wachstum:

$$16 = 20 \cdot (1 - \frac{p}{100})^6 \ |: 20$$

$$0,8 = (1 - \frac{p}{100})^6 \ | \sqrt[6]{}$$

$$0,9635 = 1 - \frac{p}{100} \ | -1$$

$$-0,0365 = -\frac{p}{100} \ |: (-1)$$

$$0,0365 = \frac{p}{100} \ | \cdot 100$$

$$3,65 = p$$

Pro Stunde gehen 3,65 % der Flüssigkeit verloren.

Schließlich spielt die Halbwertszeit t_H eine größere Rolle bei Zerfallsprozessen, da radioaktive Stoffe exponentiell zerfallen. Daher sollte man für die Halbwertszeit eine Formel verwenden. Ist p = 8 % Zerfall pro Stunde vorgegeben so gilt:

$$t_H = log_{(1-\frac{8}{)}100}(0,5)$$

Ist eine Halbwertszeit t_H von z.B. 6 Stunden gegeben und ein Anfangswert von 90 kg, so kann man eine alternative Zerfallsgleichung verwenden (siehe Formelsammlung).

$$N(t) = 90 \cdot 0,5^{\frac{t}{6}}$$

Setzt man für t = 1 ein so bekommt man indirekt den stündlichen prozentualen Zerfall:

$$N(1) = 90 \cdot 0,5^{\frac{1}{6}} = 90 \cdot 0,8909 = 80,18$$

Die 0,8909 entsprechen 89,09 %, wenn man das von 100 abzieht ergeben sich 100 - 89,09 = 10,91. Die Masse zerfällt 10,91 % pro Stunde.

13.1 Aufgaben zu Zerfallsprozessen

Aufgabe 38. *(Bevölkerungswachstum) In einem Land mit 16 Mil. Einwohnern schrumpft die Bevölkerung pro Jahr um 3 %.*
a) Wie viele Einwohner sind es nach 6 Jahren?
b) Wie viele Jahre würde es dauern bis die Bevölkerung auf 10 Mil. geschrumpft ist?
c) Bestimme die Halbwertszeit.
d) In einem anderen Land ist die Bevölkerung in fünf Jahren von 16 Mil. auf 12 Mil. gewachsen. Wie groß ist die jährliche Zerfallssrate?

Aufgabe 39. *(Radioaktiver Zerfall) Ein radioaktiver Stoff hat eine Halbwertszeit von 7 Tagen.*
a) Bestimme die Menge an Stoff, die nach 30 Tagen noch vorhanden sind, wenn ursprünglich 6 mg da waren.
b) Wann ist der Bestand von 6mg auf 1 mg zerfallen?
c) Wie groß ist die tägliche Zerfallsrate?

14 Trigonometrie

15 Strahlensätze

16 Baumdiagramm

Um Wahrscheinlichkeiten geschickt zu berechnen nimmt man dazu ein sogenanntes Baumdiagramm her. Dieses Diagramm stellt man erst auf, füllt es dann vollständig aus und liest schließlich alle gesuchten Wahrscheinlichkeiten ab. Dabei gelten zwei Rechenrgeln: 1. Wenn sich das Diagramm verzweigt eröffnen sich mehrere Wege. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Wege ist immer 1 oder 100%. 2. Man multipliziert die Zahlen entlang der Wege. Will man das Baumdiagramm verstehen, sollte man im Unterricht das Beispiel mit der Maus im Irrgarten besprechen. Es gibt zwei grundsätzliche Urnenmodelle, welche man unbedingt besprechen sollte, denn mit diesen beiden kann man praktisch alle Probleme lösen.

16.1 Das Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen

In einer Urne befinden sich 5 rote, 4 blaue und 1 gelbe Kugel. Man zieht 2 mal ohne zurückzulegen. Das Baumdiagramm siehr dann so aus:

16.2 Aufgaben zum Baumdiagramm

Aufgabe 40. *In einer Urne befinden sich 10 rote, 5 gelbe und 3 grüne Kugeln. Es wird zweimal ohne zurücklegen gezogen.*
a) Erstelle ein vollständiges Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
zwei rote
zwei gleiche
die zweite gelb
keine grüne
mindestens eine gelbe

gezogen wird.

Aufgabe 41. *In einer Urne befinden sich 5 rote, 2 gelbe und 1 grüne Kugel. Es wird zweimal ohne zurücklegen gezogen.*
a) Erstelle ein vollständiges Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
zwei rote
zwei gleiche
die zweite gelb
keine grüne
mindestens eine gelbe

gezogen wird.

Aufgabe 42. *In einer Urne befinden sich 5 rote, 2 gelbe und 1 grüne Kugel. Es wird dreimal ohne zurücklegen gezogen.*
a) Erstelle ein vollständiges Baumdiagramm.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
drei rote
drei gleiche
die dritte gelb
keine grüne
mindestens eine gelbe
drei verschiedene

gezogen wird.

Aufgabe 43. *Das IUS-Glücksrad wird zweimal gedreht.*
a) Erstelle ein vollständiges Baumdiagramm
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
zwei schwarze
zwei gleiche
zwei orange
die zweite weiß
keine orange

midestens eine orange

gedreht wird.

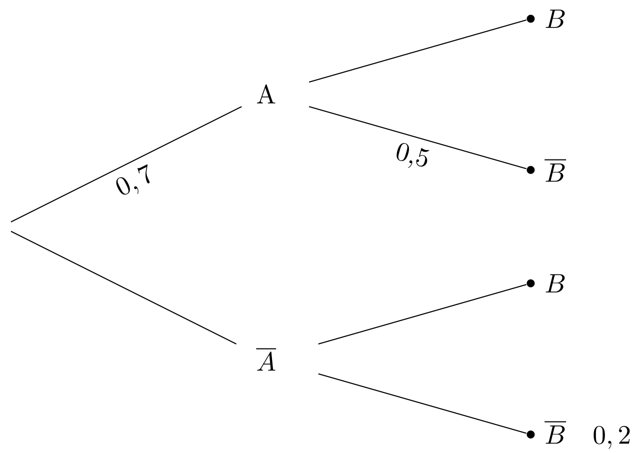
Aufgabe 44. *Ein Glücksrad mit 10 Sektoren wird zweimal gedreht. Auf fünf Sektoren ist ein Elefant, auf zwei ein Eichhörnchen, auf drei eine Eideckse*
a) Erstelle ein vollständiges Baumdiagramm
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
zwei Elefanten
zwei gleiche
die zweite Eichhörnchen
zwei Säugetiere
midestens ein Elefant

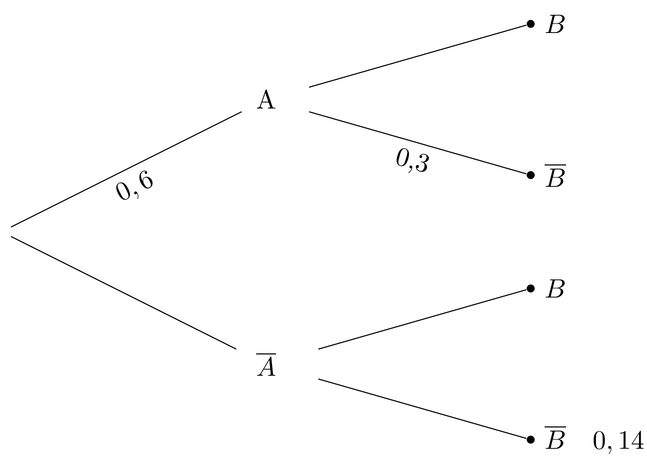
gedreht wird.

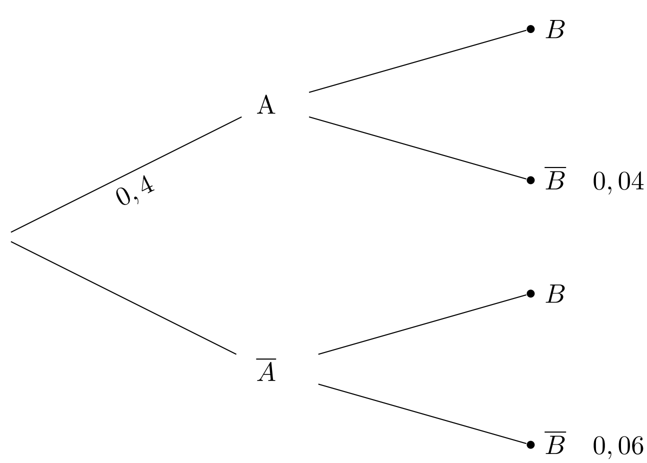
Aufgabe 45. *Ein Glücksrad mit 4 Sektoren wird dreimal gedreht. Auf 3 Sektoren ist ein N, auf einem ein G geschrieben*
a) Erstelle ein vollständiges Baumdiagramm
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
drei Gs
drei Ns
drei gleiche
zwei Gs und ein N
Mindestens ein G

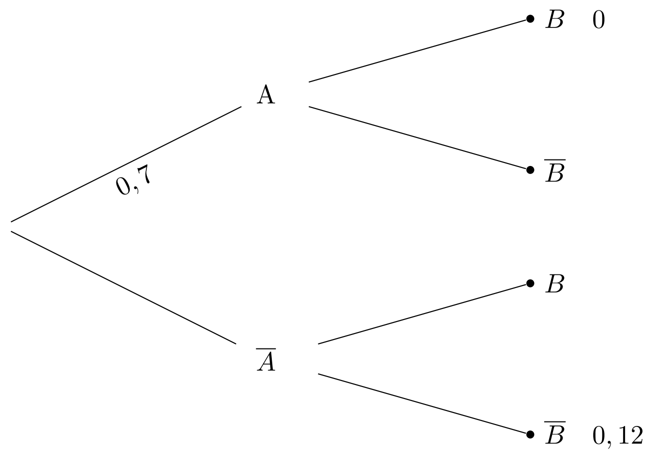
gedreht wird.

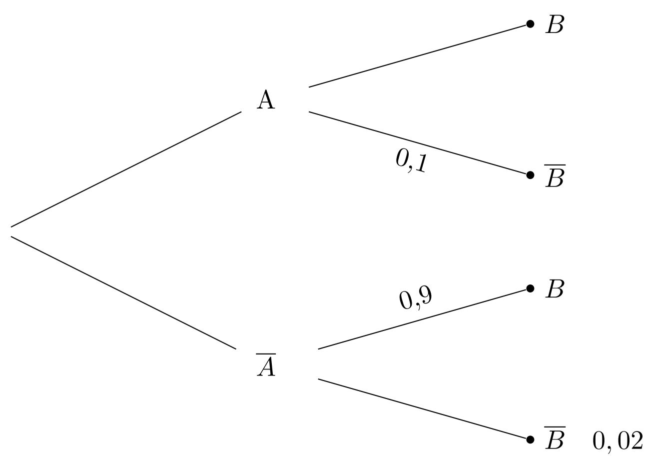
Aufgabe 46. *Fülle das Baumdigramm vollständig aus.*

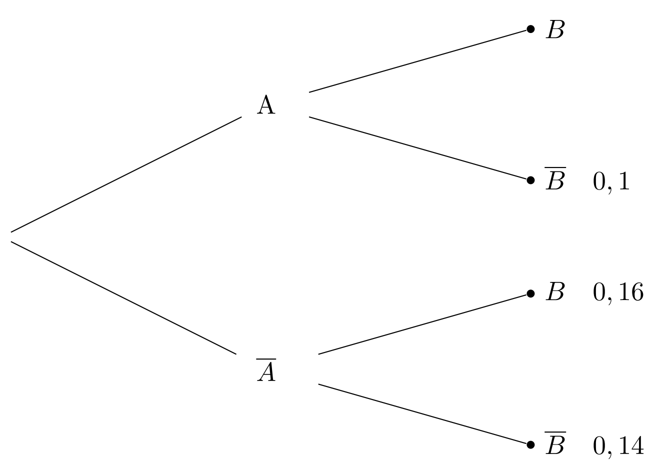

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,7
0,5
0, 2

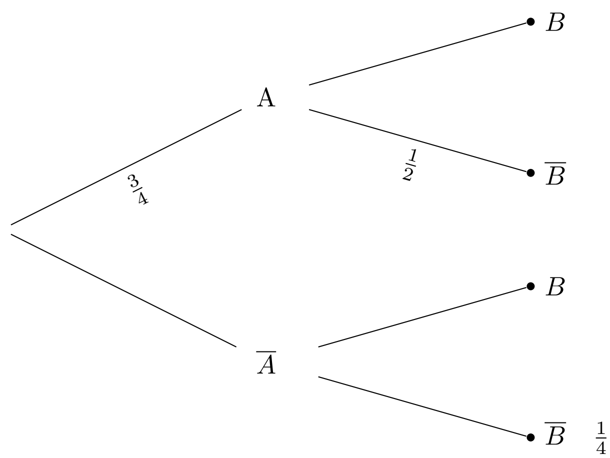

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,6
0,3
0, 14

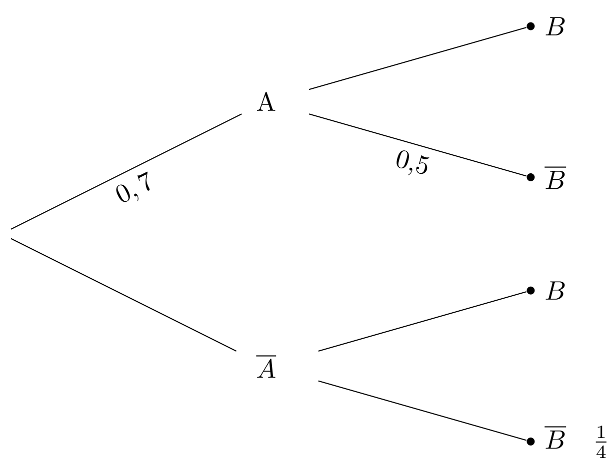

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,4
0, 04
0, 06

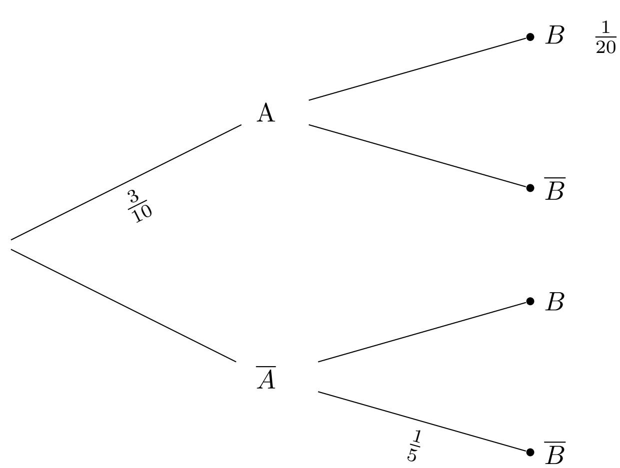

A
0,7
B
0
$\overline{B}$
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
0, 12

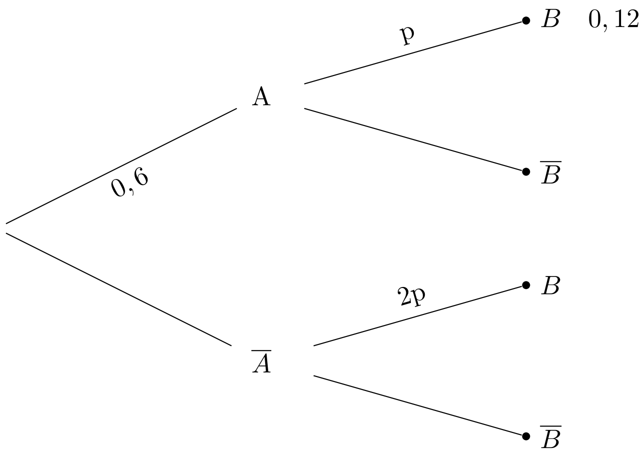

A
B
0,1
$\overline{B}$
$\overline{A}$
0,9
B
$\overline{B}$
0, 02

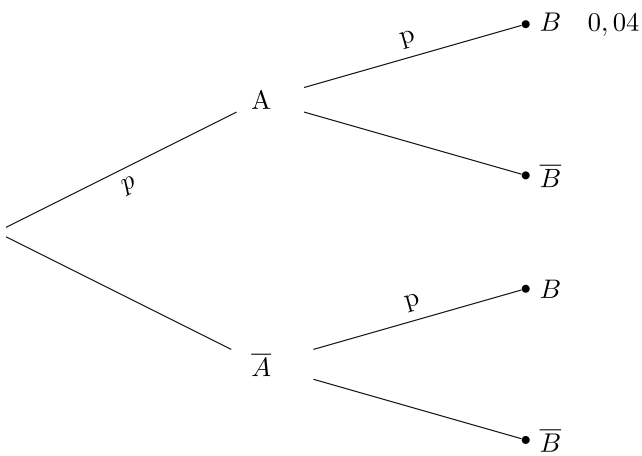

A
B
$\overline{B}$
0, 1
$\overline{A}$
B
0, 16
$\overline{B}$
0, 14

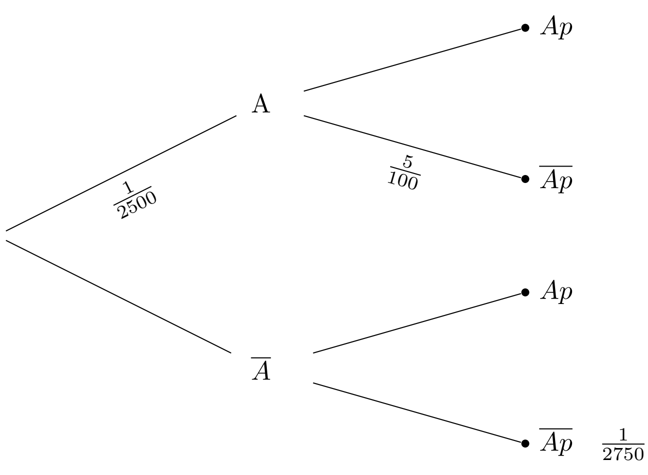

A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$


A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
0,7
0,5
$\frac{1}{4}$


A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
$\frac{3}{10}$
$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{5}$


A
0,6
p
B
0,12
B̄
Ā
2p
B
B̄


A
p
p
B
0,04
B̄
Ā
p
B
B̄


A
$\frac{1}{2500}$
Ap
$\frac{5}{100}$
$\overline{Ap}$
Ā
Ap
$\overline{Ap}$
$\frac{1}{2750}$